La résilience dans le cadre de la théorie de la viabilité

Sophie Martin

17 juin 2005

Étymologie

resilio, silire, silui (silii) [re + salio] : - tr. - 1 - sauter en arrière. - 2 - reculer (pour fuir), se dérober à, s'éloigner de, éviter. - 3 - rebondir, rejaillir, être repoussé, être refoulé. - 4 - se retirer sur soi, rentrer, se réduire, se replier. - 5 - Dig. se dédire, résilier.

Terme employé dans différents domaines

- En métallurgie
- En psychologie
- En informatique
- En économie
- En écologie

Dans le cadre des systèmes écologiques et sociaux

La résilience est liée à la notion de développement durable.

L'enjeu

Rendre le concept de résilience utilisable en proposant une définition à partir de laquelle il puisse être évalué.

Définition conceptuelle

Holling (1973) définit la résilience comme :

la capacité d'un système à pouvoir intégrer dans son fonctionnement une perturbation, sans pour autant changer de structure qualitative.

- système éloigné des équilibres
- frontières des différents modes de fonctionnement

Définitions opérationnelles

Les définitions opérationnelles existantes restent très liées au concept d'équilibre :

- définitions liées aux valeurs propres de la dynamique linéarisée à l'équilibre - Pimm et Lawton (1977)
- temps évalué par simulation de retour dans un état proche de l'état avant perturbation - Ortiz et Wolff (2002)
- taille des bassins d'attraction d'un équilibre - van Coller (1997)
- distance aux points de bifurcation - Ludwig *et al.*(1997)

L'objectif de ma thèse

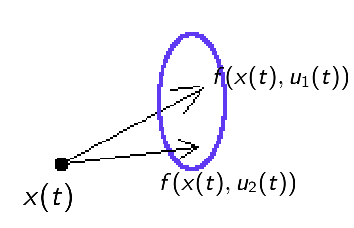
Proposer une définition opérationnelle de la résilience :

- formalisation mathématique
- algorithme de calcul

Évolutions gouvernées par des inclusions différentielles

Systèmes contrôlés :

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(x(t), u(t)) \\ u(t) &\in U(x(t)) \end{aligned} \quad (1)$$



f continue

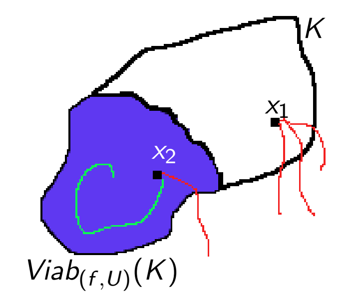
f et U croissances linéaires

$\mathrm{Graph}(U)$ fermé

$\{f(x,u) | u \in U(x)\}$ convexe

Noyaux de viabilité

Dynamique (f, U)
Ensemble des contraintes K



Évolutions gouvernées par des inclusions différentielles

Jeux dynamiques

$$\begin{array}{rcl} x'(t) & = & c(x(t), u(t), e(t)) \\ u(t) & \in & U(x(t)) \\ e(t) & \in & E(x(t)) \end{array} \tag{2}$$

- c continue
- c, U et E croissances linéaires
- $\mathrm{Graph}(U)$ et $\mathrm{Graph}(E)$ fermés
- $\forall e \in E(x)$, $\{\cup_{u \in U(x)} c(x, u, e) | u \in U(x)\}$ convexes

Noyaux discriminants

Dynamique (c, U, E)
Ensemble des contraintes K
L'ensemble des états à partir desquels, quelles que soient les incertitudes $e(.)$, il existe au moins une fonction de contrôle $u(.)$ telle que l'évolution reste dans K.

La définition de la résilience

Définition

La résilience est l'inverse du coût de restauration d'une propriété du système à la suite d'une perturbation.

La propriété : contraintes sur les états

Il existe $h : X \rightarrow H$ qui associe à l'état du système un indicateur concernant la propriété du système étudiée.
La propriété est vraie lorsque l'indicateur appartient à un sous-ensemble particulier M de H et est caractérisée par le sous-ensemble K de X :

$$K = h^{-1}(M). \tag{3}$$

L'indicateur de coût

L'indicateur de coût :

$$C_{K,T}(x) \in \mathbb{R}_+$$

la fonction valeur associée au coût éventuel de restauration de la propriété avant le temps T.

Condition 1 Le coût d'une évolution au cours de laquelle la propriété étudiée est conservée est nul.

Condition 2 Le coût associé à une évolution telle que la propriété n'est pas rétablie au temps T, c'est à dire $x(T)$ n'appartient pas à K, est infini.

La valeur de l'indicateur de coût au point x est le coût minimal sur toutes les évolutions issues de x.

Les perturbations envisagées

Une correspondance $D : X \rightsquigarrow X$ qui associe à tout état x du système l'ensemble des états atteignables après une occurrence de cette perturbation.

Première étape : calcul du noyau de viabilité

L'ensemble des états à partir desquels la propriété peut être conservée jusqu'à T, noyau de viabilité d'ordre T, $\mathrm{Viab}_{(U,f)}(K, T)$.
Le graphe de $t \rightarrow \mathrm{Viab}_{(U,f)}(K, t)$ est le noyau de viabilité d'un système auxiliaire :

$$\mathrm{Viab}_{\psi_K}(K \times \mathbb{R}_+)$$

avec

$$\psi_K(x, \rho) := \begin{cases} F(x) \times \{-1\} & \text{si} \quad \rho > 0 \\ F(x) \times [-1, 0] & \text{si} \quad \rho = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Deuxième étape : calcul de l'indicateur de coût

$$\mathcal{C}_{K,T}(x)(x(.),u(.)) := \int_0^T W(x(\tau),u(\tau))d\tau + C(x(T)).$$

Le graphe de $t \to C_{K,t}(x) := \min_{x(.),u(.)} \mathcal{C}_{K,t}(x)(x(.),u(.))$ est le noyau de viabilité d'un système auxiliaire :

$$\mathrm{Viab}_{\phi_K}(X \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$$

avec

$$\phi_K(x,\rho,\lambda,u) := \begin{cases} f(x,u) \times \{-1\} \times \{-W(x,u)\} & \text{si} \quad x \notin K \text{ ou } \rho > 0 \\ f(x,u) \times [-1,0] \times \{-W(x,u)\} & \text{si} \quad x \in K \text{ et } \rho = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Troisième étape : calcul de la résilience

Le coût d'une perturbation et la résilience du système face à cette perturbation :

- Coût d'un saut de x à y :

$$C_{K,T}(x \to y) := C_{K,T}(y). \tag{6}$$

- Coût sur l'ensemble des perturbations envisagées :

$$C_{K,T,D}(x) := \max_{y \in D(x)} C_{K,T}(y). \tag{7}$$

- résilience :

$$R_{K,T,D}(x) := \min_{y \in D(x)} \frac{1}{C_{K,T}(y)}. \tag{8}$$

Lacs oligotrophiques

Lacs oligotrophiques

Eau claire

Faible teneur en phosphates

Grande qualité écologique

Lacs eutrophiques

Lacs eutrophiques

Eau trouble

Haute teneur en phosphates

Faible qualité écologique

Prolifération d'algues vertes

Le système étudié

Un lac et les populations qui profitent de ses services ou apportent des excédents de phosphates par l'intermédiaire de leurs activités agricoles.
L'objectif des agriculteurs est d'assurer la rentabilité de leurs exploitations ; le gestionnaire du lac souhaite le maintenir dans un état oligotrophique.

La dynamique (1)

Version simplifiée du modèle décrit par Carpenter *et al.* (1999) :

$$\frac{dP(t)}{dt} = -b.P(t) + L(t) + r.\frac{P^q(t)}{m^q + P^q(t)}, \qquad (9)$$

- P la quantité de phosphates (masse ou concentration) dissous dans l'eau,
- L les apports de phosphates annuels provenant des activités humaines,
- b la proportion de phosphates éliminée à chaque pas de temps, r le taux maximal de recyclage des phosphates
- et m la valeur de P pour laquelle le recyclage atteint la moitié du taux de recyclage maximal.

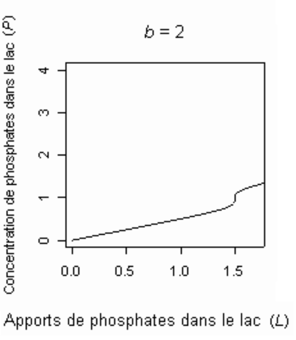
En fonction de la valeur de b, trois différents types de lacs Janssen et Carpenter (1999) :

Lac réversible

Lac hystérésique

Lac irréversible

En fonction de la valeur de b, trois différents types de lacs Janssen et Carpenter (1999) :



Lac réversible

Lac hystérésique

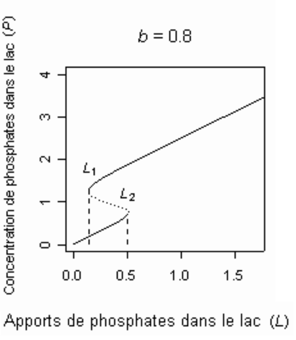
Lac irréversible

En fonction de la valeur de b, trois différents types de lacs Janssen et Carpenter (1999) :

Lac réversible

Lac hystérésique

Lac irréversible

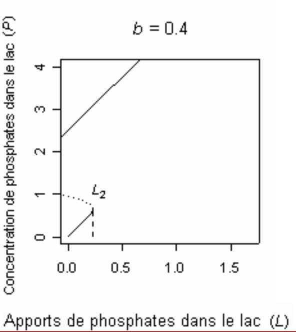


En fonction de la valeur de b, trois différents types de lacs Janssen et Carpenter (1999) :

Lac réversible

Lac hystérésique

Lac irréversible



La dynamique (2)

Les variations temporelles des apports de phosphates dépendent directement du contrôle u choisi par le gestionnaire :

$$\frac{dL(t)}{dt} = u. \tag{10}$$

Ces variations sont bornées, u appartient à l'ensemble fermé des contrôles admissibles U :

$$u \in U := [-VL_{max}, VL_{max}]. \tag{11}$$

Contraintes sur les états (1)

Le gestionnaire du lac a comme but de le conserver dans un état oligotrophique.
Un lac oligotrophe devient eutrophe lorsque la quantité de phosphates dissous dans l'eau croît au-dessus d'un seuil fixé P_{max}.
Par conséquent, l'objectif du gestionnaire du lac est atteint lorsque la variable positive P satisfait :

$$P \in [0, P_{max}] \,. \tag{12}$$

Contraintes sur les états (2)

L'objectif des agriculteurs est la rentabilité de leurs activités. Leur bénéfice dépend linéairement des apports en phosphates. Ainsi, leur objectif est atteint lorsque la valeur des apports de phosphates dépendant des activités humaines est supérieur à un seuil donné, L_{min}.

Un seuil maximal d'apports de phosphates, L_{max}, est fixé par les institutions ou les parties prenantes.

Les activités des agriculteurs sont donc rentables et légales lorsque :

$$L \in [L_{min}, L_{max}] \,. \tag{13}$$

La dynamique et les contraintes

Les équations (10), (11), (12) et (13) peuvent être écrites de manière synthétique dans le formalisme des inclusions différentielles en considérant la variable vectorielle $x(t) := (L(t), P(t))$ appartenant à $X := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & (L'(t), P'(t)) = (u(t), -b.P(t) + L(t) + r.\frac{P^q(t)}{m^q + P^q(t)}) \\ u(t) & \in & U(x(t)) = U\,. \end{array} \right. \tag{14}$$

avec comme contraintes

$$x(t) \in K := [L_{min}, L_{max}] \times [0, P_{max}]\,. \tag{15}$$

L'indicateur de coût

$$\lambda_{K,T=\infty}(x) := \min_{x(.)} \int_0^{+\infty} (c_1.\chi_1(x(\tau)) + c_2.\chi_2(x(\tau)))d\tau \qquad (16)$$

avec $\chi_1, \chi_2 : X \to \mathbb{R}_+$ telles que

$$\begin{array}{rcll} \chi_1(x) & := & 1 & \text{si } x \in X \backslash H_1, \\ & := & 0 & \text{si } x \in H_1 \end{array} \qquad (17)$$

avec $H_1 := \{x = (L, P) \in X | P \leq P_{max}\}$ et

$$\begin{array}{rcll} \chi_2(x) & := & L_{min} - L & \text{si } x \in X \backslash H_2, \\ & := & 0 & \text{si } x \in H_2 \end{array} \qquad (18)$$

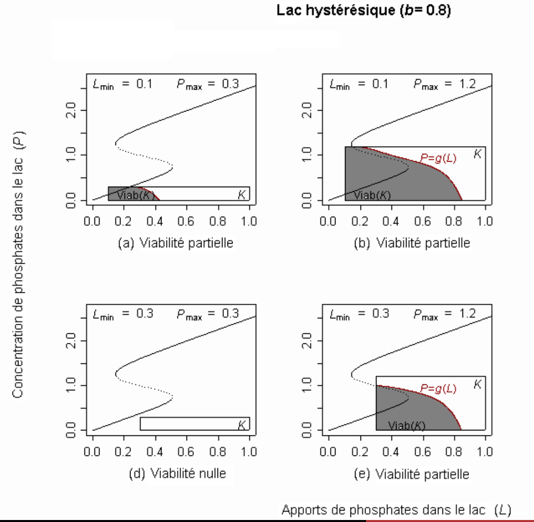
avec $H_2 := H = \{x = (L, P) \in X | L \geq L_{min}\}$.
Le premier terme correspond au coût écologique (*temps de crise* Doyen et Saint-Pierre (1997)), le second au coût économique.

Les perturbations

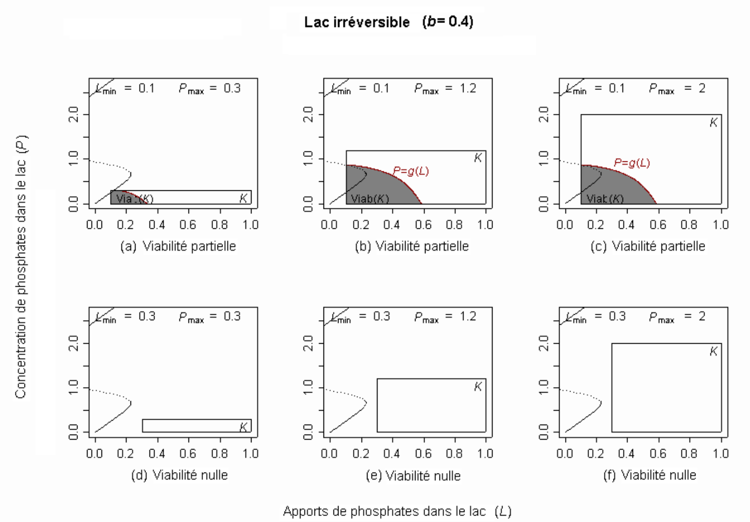
Les perturbations D_α correspondant à une brusque augmentation de la concentration de phosphates dans l'eau du lac :

$$D_\alpha(x) := \{y \in X | y \in x + \{0\} \times [0, \alpha]\} : . \qquad (19)$$

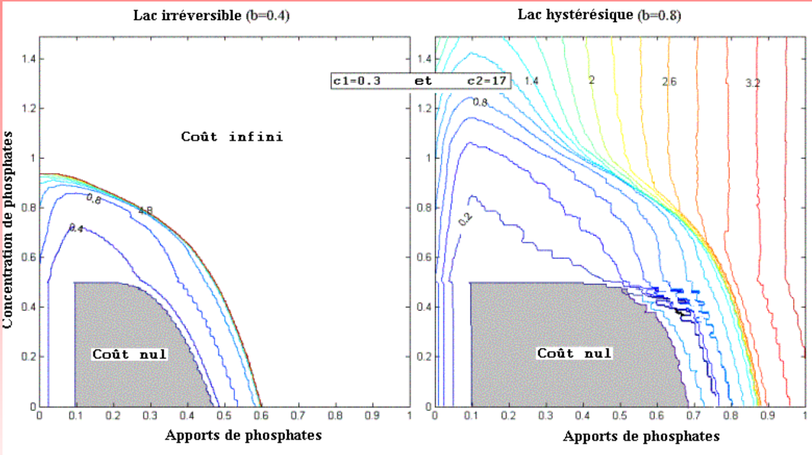
Noyaux de viabilité



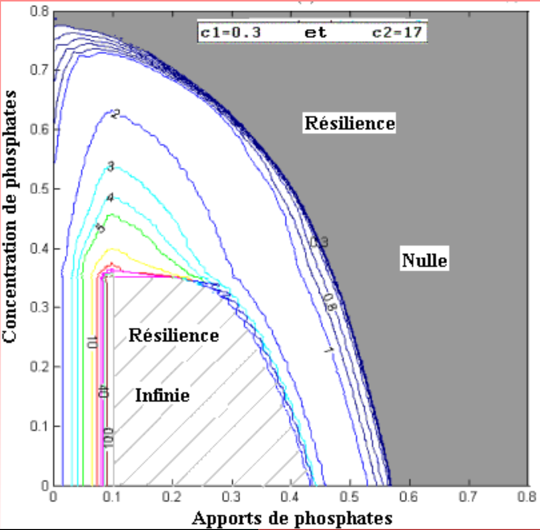
Noyaux de viabilité



Indicateur de coût



Résilience


c1=0.3 et c2=17
Résilience
Nulle
Résilience
Infinie
Concentration de phosphates
Apports de phosphates
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
2
3
4
5
0.3
0.8
1
10
40
100

Conclusion (1) : compatibilité avec la définition d'Holling

La valeur de la résilience dépend (Carpenter et al. (2001)) :

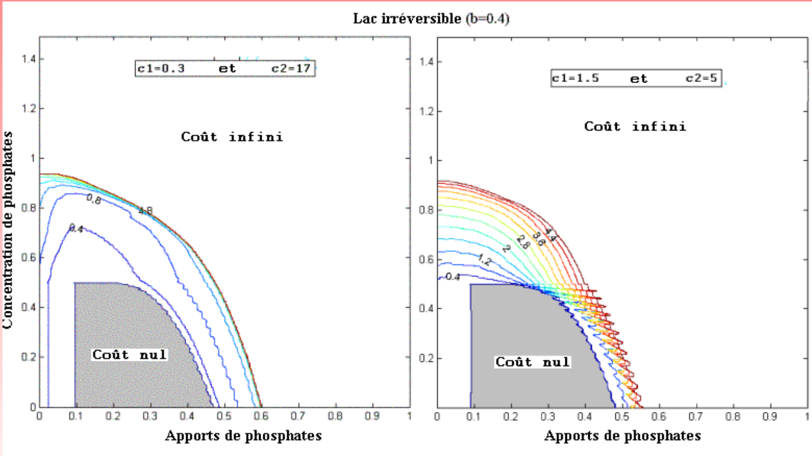
- (i) de l'état du système,
- (ii) de la propriété du système étudiée,
- (iii) des types de perturbations envisagées,
- (iv) du coût associé à la restauration éventuelle de cette propriété,
- (v) des contrôles disponibles, et
- (vi) de l'horizon temporel considéré.

Conclusion (2) : limites

La dimension du problème pour le calcul des noyaux de viabilité.
Pistes suivies :

- amélioration du codage (avec P. Saint-Pierre)
- utilisation de méthodes d'apprentissage (avec G. Deffuant)
- utilisation de schémas anti-diffusifs (O. Bokanowski, R. Munos, H. Zidani)

Indicateurs de coût



Conclusion (1) : compatibilité avec la définition d'Holling

La valeur de la résilience dépend (Carpenter et al. (2001)) :

- (i) de l'état du système,
- (ii) de la propriété du système étudiée,
- (iii) des types de perturbations envisagées,
- (iv) du coût associé à la restauration éventuelle de cette propriété,
- (v) des contrôles disponibles, et
- (vi) de l'horizon temporel considéré.

Intensité de la perturbation