

Indicateurs de sécurité et de restauration dynamiques

Isabelle Alvarez, Sophie Martin, Olivier Dordan, Xavier Litrico, Patrick Saint-Pierre

Introduction

Les systèmes agricoles au sens large et leur environnement peuvent être décrits comme des systèmes dynamiques : par exemple, des activités agricoles utilisent chaque année des engrais phosphatés. Ces engrais ne se fixent pas dans le sol, mais descendent par infiltration ou écoulement de surface vers les écosystèmes aquatiques – rivières, lacs, baies. Les concentrations excessives de substances nutritives dans ces bassins aquatiques provoquent la prolifération de nappes d'algues.

Ces systèmes agricoles sont soumis à des contraintes de rentabilité bien sûr, mais pas uniquement. En effet, les populations riveraines d'un lac souhaitent qu'il conserve un état d'eau claire (oligotrophe), et éviter la prolifération des algues impose des contraintes supplémentaires sur les activités agricoles, en l'occurrence, limiter les apports d'engrais dans le bassin versant.

Enfin, ces systèmes agricoles sont soumis à des incertitudes. Viennent immédiatement à l'esprit les aléas climatiques, mais pour rester dans l'exemple du lac, un événement pluvieux intense peut provoquer un ruissellement important qui a pour conséquence immédiate d'augmenter brusquement la concentration de phosphore dissous.

Face à des systèmes qui évoluent soumis à des contraintes et des incertitudes, quelles informations fournir au gestionnaire ?

Tout d'abord, des informations sur l'état actuel du système, comme la jauge à essence. Le passage du lac d'un état oligotrophe à un état eutrophe (prolifération des algues) dépend essentiellement du seuil de concentration en phosphore à ne pas dépasser : si l'on connaît ce seuil, la connaissance de la concentration actuelle, et donc de l'écart à la concentration seuil, est une information instantanée importante.

Concernant les états futurs du système, des informations sont souvent fournies sous forme de probabilités : la probabilité de défaillance d'un système sur un intervalle de temps par exemple, ou sa fiabilité qui vaut 1 moins la

probabilité précédente. Ces informations se soucient du futur mais sans nécessairement être corrélées à la situation actuelle du système, ni aux actions futures du gestionnaire, sauf éventuellement par l'intermédiaire de scénarios prédéfinis.

Or, les actions futures ont une influence sur l'état futur du système, et plutôt que se poser la question des conséquences d'une suite d'actions, on peut inverser le problème et chercher quelles suites d'actions, si elles existent, peuvent produire les effets souhaités sur l'état du système. Autrement dit, en reprenant l'exemple du lac, quels sont les apports de phosphore que l'état oligotrophe du lac peut supporter ?

La théorie mathématique de la viabilité développe précisément des concepts et outils pour étudier la compatibilité entre des dynamiques contrôlées et des ensembles de contraintes. Ses deux concepts principaux sont le noyau de viabilité et le bassin de capture. L'objectif de cet article est de montrer qu'ils peuvent permettre de construire des indicateurs pertinents sur l'état futur du système. L'exemple de la gestion des exploitations agricoles riveraines d'un lac servira d'illustration tout au long de l'article. Dans un premier temps, nous décrirons donc plus en détail cet exemple, en particulier les dynamiques considérées, les modes d'actions envisagés et les propriétés souhaitées du système ; puis nous montrerons comment les concepts de la théorie de la viabilité, le noyau de viabilité et le bassin de capture permettent d'apporter des réponses à des questions de gestion durable : pour une situation actuelle, les propriétés désirées pourront-elles être conservées dans le futur ? Si la réponse est oui, quelles sont les actions à mener pour y arriver effectivement ? Dans le cas contraire, ces propriétés peuvent-elles être restaurées ? En suivant quelles actions ? Dans un second temps, nous verrons comment construire des indicateurs plus fins que ces indicateurs binaires d'appartenance ou non aux ensembles noyau de viabilité et bassin de capture.

La gestion durable à l'aide de la théorie de la viabilité

L'exemple des exploitations riveraines d'un lac

La théorie de la viabilité (Aubin, 1991) est particulièrement bien adaptée pour étudier des problèmes de gestion durable. On s'appuiera dans cet article sur l'exemple du lac (Martin, 2004).

Le système étudié est constitué par un lac et les exploitations agricoles qui l'entourent. L'un des impacts de l'activité agricole est le déversement de phosphore dans le lac (par ruissellement, ou lessivage des sols, par exemple). Cet apport de phosphore d'origine agricole se combine au phosphore dissous dans le lac et au phosphore recyclé depuis les sédiments, suivant une dynamique bien connue (Carpenter *et al.*, 1999). Pour des valeurs élevées de phosphore dissous se produit un phénomène d'eutrophisation : le lac change d'aspect, les

eaux sont troubles, la biodiversité est affectée, la qualité des services rendus par le lac diminue très fortement.

Dans cet exemple, le système composé du lac et des agriculteurs peut être décrit de manière schématique par un système dynamique dans un espace à 2 variables, les apports de phosphore, notés L et le phosphore dissous, noté P . C'est l'espace des états du lac. En effet, lorsque le recyclage du phosphore par les poissons et le zooplancton peut être négligé, la variation de la concentration du phosphore dissous est une somme de trois termes décrivant : (1) l'élimination du phosphore, proportionnel à sa concentration (avec un facteur b), (2) les apports de phosphore dans le lac et (3) le recyclage par les sédiments qui est une fonction (sigmoïde de paramètres r, m, q) de la concentration (Carpenter *et al.*, 1999) :

$$\frac{dP}{dt}(t) = -b.P(t) + L(t) + r \frac{P^q(t)}{m^q + P^q(t)}.$$

La dynamique présente un phénomène d'hystérésis, c'est-à-dire que le retour à un état oligotrophe, quand il est possible, ne se produit qu'à des valeurs d'apport de phosphore beaucoup plus faibles que celle à laquelle l'eutrophisation s'est produite (Fig. 1).

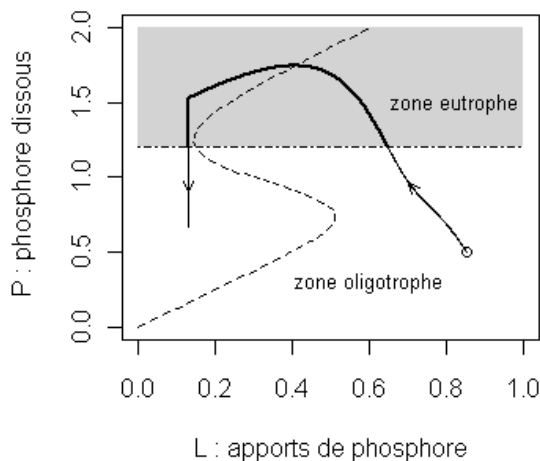


Fig. 1. Comportement d'hystérésis. Une trajectoire de la dynamique est représentée en trait plein. Les apports de phosphore doivent diminuer très fortement pour que la dynamique du lac le ramène à un état oligotrophe. Cela est dû à la forme de pli de la ligne des équilibres de la dynamique représentée en pointillé : les valeurs de P telles que $dP/dt=0$ à valeur fixée des apports, L . ($b = 0.8, r = 1, m = 1, q = 8$)

On considère de plus que les apports de phosphore peuvent être régulés, par exemple en imposant une diminution des apports annuels de phosphore dans le lac. Dans cet exemple on considérera une régulation qui limite la vitesse de variation des apports annuels de phosphore (ce type de régulation est assez fréquent, c'est ce qui existe au niveau international pour limiter les émissions de CO₂) :

$$\frac{dL}{dt}(t) = u(t) \in [u_{\min}; u_{\max}].$$

Les préoccupations des protagonistes peuvent se traduire par des contraintes sur les deux variables. Pour maintenir le lac dans un état oligotrophe, le phosphore dissous ne doit pas dépasser une valeur maximale P_{\max} . Pour exercer leur activité de manière satisfaisante, les exploitations doivent être autorisées à déverser indirectement une quantité minimale L_{\min} de phosphore. Pour des raisons environnementales, les apports en phosphore sont limités à une valeur maximale L_{\max} . Ces contraintes délimitent un sous-espace de l'espace des états du lac, nommé ensemble de contraintes, comme le montre la figure 2. Cet ensemble regroupe les états du système qui sont considérés comme satisfaisants par toutes les parties. Dans cette zone, le lac est dans un état oligotrophe, les exploitations agricoles peuvent exercer leur activité et les rejets dans l'environnement sont limités. L'ensemble de contraintes délimite la zone dans laquelle le système du lac doit évoluer en permanence.

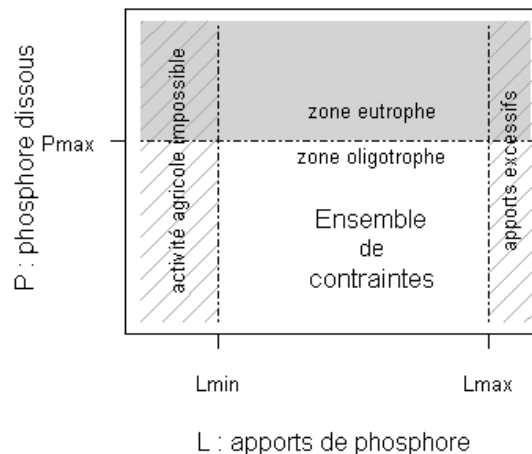


Fig. 2. Ensemble de contraintes dans le cas du système des exploitations riveraines du lac. Cet ensemble est délimité par la valeur maximale du phosphore dissous, P_{\max} , et les valeurs minimales et maximales des apports de phosphore, L_{\min} et L_{\max} .

L'étude de viabilité du système « exploitations riveraines du lac »

L'ensemble de contraintes

L'ensemble des contraintes délimite la zone dans laquelle on souhaite que le système du lac et ses exploitations riveraines puisse évoluer en permanence, comme dans le cas de la situation initiale notée « A » de la figure 3. Cependant, cela peut ne pas être possible. Tout comme un véhicule lancé à grande vitesse dans un virage reste sur la route tant qu'il ne l'a pas quittée, le lac peut être dans une dynamique d'augmentation très rapide du phosphore dissous que rien ne peut plus enrayer : dans ce cas, il quittera l'ensemble des contraintes et deviendra eutrophe inéluctablement, même si le lac reste oligotrophe jusqu'à ce que le phosphore dépasse un certain seuil. Le lac peut être ainsi condamné à subir une eutrophisation alors qu'il est encore dans la zone oligotrophe. C'est le cas pour la situation initiale notée « B » dans la figure 3.

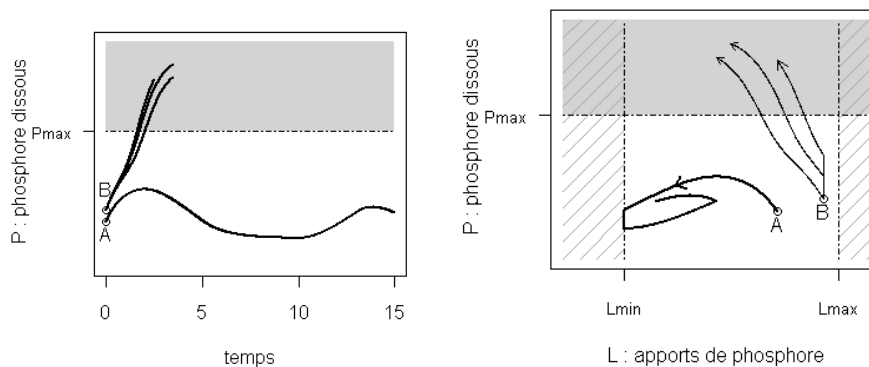


Fig. 3. Tous les points de l'ensemble de contraintes ne sont pas nécessairement des états souhaitables pour le lac. Par exemple, à partir du point B, tous les efforts de contrôle sont inutiles : il n'est pas possible de maintenir le niveau de phosphore dissous en dessous du seuil d'eutrophisation. En revanche, à partir du point A, on peut trouver une suite de régulation qui permet de conserver le phosphore dissous en dessous du seuil critique. ($b = 0.8$, $r = 1$, $m = 1$, $q = 8$) ($L_{\min} = 0.1$, $L_{\max} = 0.9$, $P_{\max} = 1.2$)

Le noyau de viabilité et son complémentaire

L'étude de viabilité consiste justement à rechercher le sous-ensemble de l'espace des contraintes dans lequel le système peut évoluer indéfiniment. C'est le noyau de viabilité de l'ensemble des contraintes.

À l'intérieur du noyau de viabilité, il existe une fonction de contrôle qui permet de rester dans le noyau, et donc de respecter les contraintes au cours du temps. Lorsque le noyau de viabilité ne coïncide pas avec l'ensemble des contraintes, les états qui appartiennent à l'ensemble des contraintes, mais pas au noyau de viabilité, sont des états du système pour lesquels les contraintes de viabilité sont satisfaites aujourd'hui. Cependant, quels que soient les contrôles mis en œuvre, les contraintes seront nécessairement violées en temps fini. C'est ce que montre la figure 4.

Dans le complémentaire du noyau de viabilité dans l'ensemble des contraintes, le lac est certain de subir une eutrophisation dans le futur (même si son état actuel est encore satisfaisant).

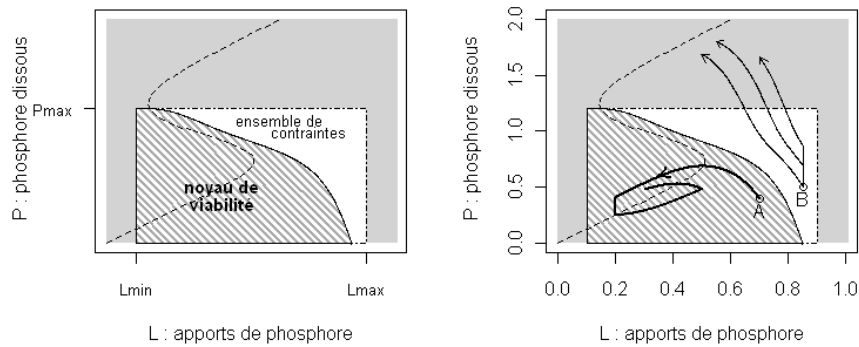


Fig. 4. Noyau de viabilité du système « exploitations riveraines » du lac. Pour les états situés dans le noyau (hachuré), il existe toujours une suite de contrôles qui permet au lac de rester dans le noyau. Pour les points du complémentaire (en blanc), toutes les trajectoires possibles sortent de l'espace des contraintes en un temps fini. Le noyau de viabilité contient bien entendu les équilibres de la dynamique (en pointillé) qui appartiennent à l'ensemble des contraintes. ($b = 0.8$, $r = 1$, $m = 1$, $q = 8$) ($L_{\min} = 0.1$, $L_{\max} = 0.9$, $P_{\max} = 1.2$)

Le bassin de capture et son complémentaire

L'étude de viabilité comporte aussi la recherche des états à partir desquels le système peut être ramené dans le noyau de viabilité même s'il n'y était pas à l'origine. L'ensemble de ces états est le bassin de capture du noyau de viabilité. Pour le système du lac et des exploitations riveraines, il s'agit de s'intéresser aux cas où le lac n'est pas déjà dans le noyau de viabilité. Ainsi, soit le lac est déjà dans un état eutrophe (il n'est pas dans l'ensemble des contraintes), soit il subira une eutrophisation dans le futur (le lac est encore dans l'ensemble des contraintes, mais dans le complémentaire du noyau de viabilité).

La théorie de la viabilité fournit les outils permettant de calculer le bassin de capture. Pour les états qui font partie du bassin de capture, il existe une suite de contrôles qui permet de ramener le lac dans un état oligotrophe et de l'y maintenir indéfiniment.

Dans certains cas, le bassin de capture couvre l'espace tout entier (Fig. 5). En temps fini (mais non borné), il est toujours possible de ramener le lac dans un état oligotrophe et de l'y maintenir.

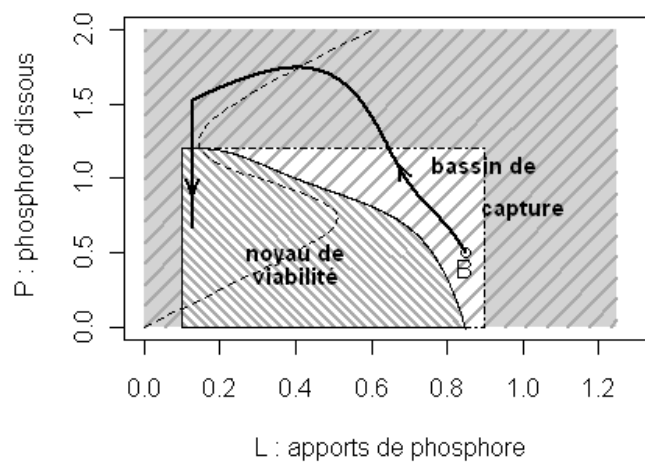


Fig. 5. Le bassin de capture (hachures espacées) du noyau de viabilité du système du lac égal à l'ensemble de l'espace des états. A partir de toute situation initiale, il est possible de ramener le lac dans un état oligotrophe et de l'y maintenir. ($b = 0.8$, $r = 1$, $m = 1$, $q = 8$) ($L_{\min} = 0.1$, $L_{\max} = 0.9$, $P_{\max} = 1.2$)

Dans d'autres cas (pour d'autres valeurs des paramètres), le bassin de capture ne couvre qu'une partie de l'espace (Fig. 6). Les lacs de ce type sont dits irréversibles : pour les points de l'ensemble complémentaire (en blanc dans la figure), l'eutrophisation est inéluctable et sera définitive tant que le système n'est pas modifié.

Par modification du système, on entend par exemple un changement de la méthode de régulation : des contrôles plus rigoureux ou de nature différente. Avec ces nouvelles dynamiques, les noyaux et bassins obtenus peuvent être plus favorables.

Si le retour à un état oligotrophe reste impossible, même en supprimant complètement les apports de phosphore, c'est-à-dire en arrêtant toute activité humaine à proximité, une autre piste est de modifier brutalement l'état du lac, non pas en suivant les dynamiques classiques du phosphore mais, par exemple,

en envisageant une vidange du lac (comme pour les retenues de barrage), et un curage des fonds.

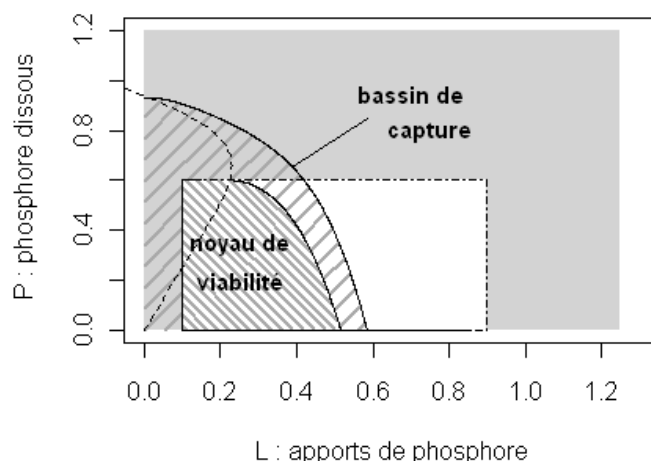


Fig. 6. Bassin de capture d'un lac irréversible (hachures espacées). La zone blanche représente les états de l'ensemble de contraintes à partir desquelles le lac, oligotrophe à l'origine, subira une eutrophisation irréversible dans le futur. ($b = 0.4$, $r = 1$, $m = 1$, $q = 8$) ($L_{\min} = 0.1$, $L_{\max} = 0.9$, $P_{\max} = 0.6$)

Les indicateurs de la viabilité

Des indicateurs pertinents pour chaque situation

Dans le noyau de viabilité

Le fait de savoir que la situation actuelle appartient au noyau de viabilité assure qu'il existe au moins une politique de contrôle qui permet de conserver l'état du système dans l'ensemble des contraintes. Cependant, toutes les situations incluses dans le noyau de viabilité ne sont pas équivalentes.

Des informations sur les contrôles à mettre en œuvre pour assurer effectivement la viabilité du système peuvent être très pertinentes. Une situation peut rester viable sans nécessiter de contrôle, une autre au contraire peut demander pour rester viable des actions intenses. A partir de la même situation initiale, deux stratégies de contrôle viables peuvent nécessiter, l'une, des valeurs de contrôle élevées, l'autre, des valeurs de contrôle plus faibles. La fonction d'inertie permet d'associer à une situation viable donnée la stratégie de contrôle qui minimise la valeur de contrôle la plus élevée à mettre en œuvre au cours du

temps pour rester viable. Dans la figure 7, sont représentées à gauche trois trajectoires viables issues de la situation initiale « A », et à droite les fonctions de contrôle associées. Il faut comparer les valeurs maximales prises au cours du temps par ces fonctions de contrôle. Celui de la fonction de contrôle en trait plein est le plus petit, notons le I . C'est donc cette stratégie de contrôle qu'il faut suivre à partir de la situation « A », si l'on souhaite rester viable tout en minimisant les valeurs maximales prises par la fonction de contrôle. Réciproquement, si la fonction d'inertie en un point A du noyau vaut I , alors il existe une évolution issue de A qui reste viable en nécessitant l'utilisation de contrôles au cours du temps d'intensité au plus égale à I .

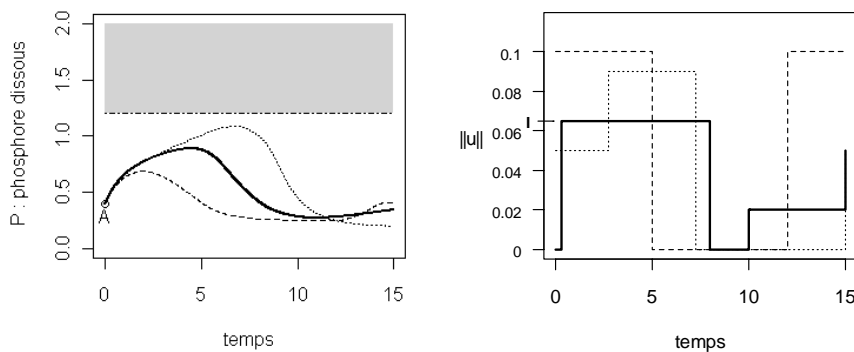


Fig. 7. Trois évolutions viables issues d'un point viable A (à gauche) et leur fonction de contrôle associée (à droite). L'inertie, I , est le plus petit des maximums des valeurs de la fonction de contrôle au cours du temps.

Dans le système considéré, ce n'est pas tant l'intensité du contrôle qui importe mais l'intensité de ses variations. En considérant comme contrôle non plus le contrôle lui-même mais sa dérivée, il est possible, au prix de traiter un problème d'une dimension supplémentaire, d'associer à chaque situation du noyau le maximum des variations de contrôle nécessaires pour assurer effectivement la viabilité dans le futur.

Hors du noyau de viabilité dans l'ensemble de contraintes

Lorsque la situation est dans l'ensemble des contraintes mais hors du noyau de viabilité, cela signifie qu'à l'instant actuel, les contraintes sont satisfaites, mais que dans le futur, quelles que soient les actions menées le système est condamné à les violer.

Cependant, là encore, les situations dans l'ensemble des contraintes mais hors du noyau de viabilité ne sont pas identiques. L'information indiquant le temps maximal (nécessairement fini) durant lequel les contraintes peuvent

encore être satisfaites peut être cruciale : elle permet de connaître le temps dont on dispose pour inventer d'autres solutions. Dans la terminologie de la théorie de la viabilité, cette information est appelée « temps de sortie ».

La figure 8 montre trois évolutions issues du point de l'ensemble des contraintes non viable B, correspondant à trois fonctions de contrôle différentes. L'évolution en trait plein quitte l'ensemble des contraintes le plus tardivement. C'est elle qui va servir à évaluer le temps de sortie dans la situation « B », notée t_{sortie} sur la figure : si la fonction de temps de sortie en un point B non viable de l'ensemble des contraintes vaut t_{sortie} , alors il existe une évolution issue de B qui satisfait les contraintes pour une durée t_{sortie} mais sans espoir de faire mieux.

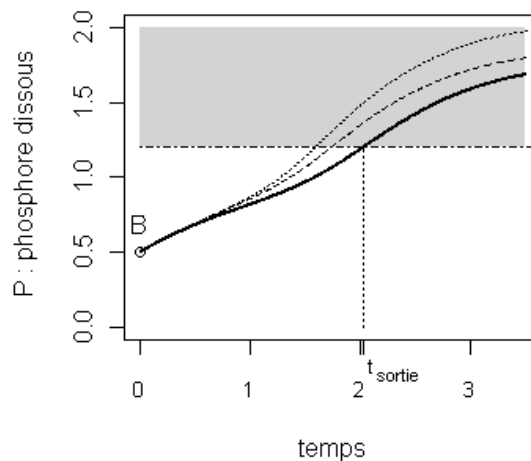


Fig. 8. Trois évolutions issues d'un point de l'ensemble des contraintes non viable B. Le temps de sortie, t_{sortie} , est celui de l'évolution qui quitte l'ensemble des contraintes le plus tard.

Dans le bassin de capture

Lorsque la situation appartient au bassin de capture du noyau de viabilité, cela signifie qu'il existe une fonction de contrôle du système qui permet d'atteindre le noyau de viabilité en temps fini. Ce temps est nul bien sûr pour les éléments de ce noyau. Hors du noyau, ce temps est fini et non nul. Pour une situation donnée, sa valeur minimale sur l'ensemble des évolutions possibles est une information importante. Elle permet de savoir le temps minimum nécessaire pour retourner dans le noyau de viabilité. Elle est appelée « temps de crise » (Doyen et Saint-Pierre, 1997).

La figure 9 montre trois évolutions issues du point du bassin de capture C correspondant à trois fonctions de contrôle différentes. L'évolution en trait plein atteint le noyau de viabilité le plus rapidement. C'est elle qui va servir à évaluer le temps de crise dans la situation « B », notée t_{crise} sur la figure : si la fonction de temps de crise en un point C du bassin de capture vaut t_{crise} , alors il existe une évolution issue de C qui atteint le noyau de viabilité au bout d'une durée t_{crise} , mais sans espoir de faire mieux.

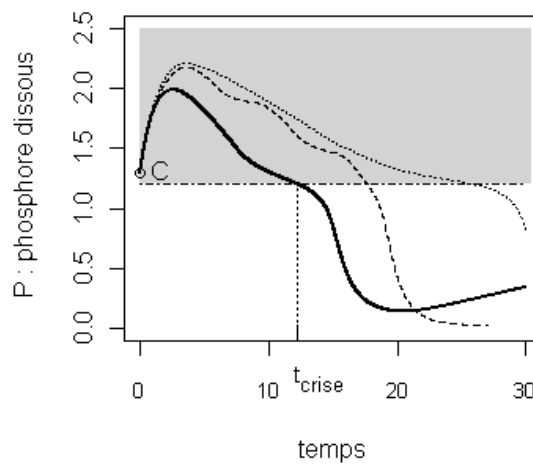


Fig. 9. Trois évolutions issues d'un point du bassin de capture C. Le temps de crise, t_{crise} , est celui de l'évolution qui atteint le noyau de viabilité le plus rapidement.

Le temps de retour dans le noyau n'est pas nécessairement le seul coût à prendre en compte pour évaluer les efforts à fournir pour atteindre le noyau de viabilité. D'autres fonctions de l'état et du contrôle peuvent également être considérées.

Prise en compte des incertitudes

Incertitudes sur l'ensemble des contraintes : fonction de sécurité et de transgression

La théorie de la viabilité permet de prendre en compte une partie des incertitudes au niveau de la dynamique, par exemple en considérant que l'évolution au cours du temps n'est pas un vecteur parfaitement déterminé, mais qu'il appartient à un ensemble de vecteurs possibles. En revanche, l'incertitude sur les paramètres du modèle nécessite une approche classique d'analyse de

sensibilité, pour évaluer dans quelle mesure le noyau de viabilité est affecté par la variation des paramètres (Saltelli *et al.*, 2000).

La détermination des contraintes mérite une considération particulière. En effet, ce sont les parties prenantes qui fixent l'ensemble des contraintes, des marges d'appréciation sont donc à prévoir. Dans le cas du lac, par exemple, les exploitants agricoles peuvent avoir une marge d'imprécision sur le niveau minimal de rejet que leur activité peut entraîner. Même pour les contraintes qui sont fixées à la suite de mesures ou d'études spécifiques, des imprécisions peuvent subsister. Par exemple, le seuil de phosphore dissous acceptable peut ne pas être connu avec précision.

Pour toutes ces raisons, il peut être utile de faire une analyse de sensibilité particulière pour l'ensemble des contraintes, en considérant que la frontière de cet ensemble est susceptible de se déplacer. En utilisant les concepts et outils de la morphologie mathématique (Serra, 1988), on peut considérer successivement les « érosions » de l'ensemble des contraintes, en retirant les points situés à une distance r de la frontière. On calcule le nouveau noyau de viabilité associé au nouvel ensemble de contraintes érodé. Ce nouveau noyau est nécessairement inclus dans les noyaux calculés avec un ensemble moins érodé, comme le montre la figure 10. En modifiant la valeur de r , et en calculant à chaque fois le nouveau noyau associé à cette érosion, on peut définir en chaque point du noyau initial une fonction de sécurité : c'est la valeur maximale de l'érosion pour laquelle le point est encore dans le noyau de viabilité de l'ensemble de contraintes érodé.

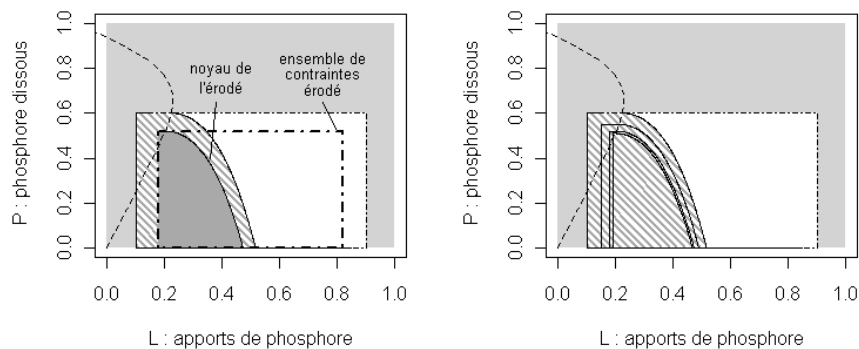


Fig. 10. À gauche : diminution du noyau de viabilité associé à un ensemble de contraintes érodé de r (distance L^1 : les seuils des contraintes ont été déplacés vers l'intérieur d'une distance r). À droite : frontières des noyaux de viabilité pour trois valeurs de seuils différents constituant les courbes de niveaux de la fonction de sécurité à l'intérieur du noyau de viabilité initial. La frontière du noyau initial est la courbe de niveau 0 de cette fonction de sécurité.

La fonction de sécurité permet de structurer le noyau de viabilité, et de rechercher des trajectoires garantissant un certain niveau de sécurité. Par exemple, on peut rechercher pour le problème du lac, des évolutions qui restent toujours à une distance r de la frontière de l'ensemble des contraintes. Si le noyau de l'ensemble de contraintes érodé de r n'est pas vide, alors, à partir de chacun de ses points, il existe une fonction de contrôle qui assure de rester dans le noyau de viabilité même si les contraintes ont été fixées avec une erreur inférieure à r .

La construction de la fonction de sécurité peut être vue comme une analyse de sensibilité systématique du modèle. Elle est donc très coûteuse, puisqu'elle rajoute une dimension au problème. En revanche, si on dispose d'une estimation du niveau d'incertitude, il est possible de calculer directement le noyau correspondant à l'érosion à ce niveau. Les trajectoires qui restent dans le noyau de l'érodé seront toujours à une distance suffisante (par rapport au niveau d'incertitude) de la frontière de l'ensemble de contraintes. Entre deux trajectoires partant du même état et qui restent dans le noyau de viabilité, on aura donc intérêt à préférer la trajectoire dont la valeur de sécurité est la plus élevée.

Le même type de processus peut être utilisé pour déterminer les zones de l'espace des états où le système du lac ne s'éloigne pas « trop » de l'ensemble des contraintes, s'il en sort (par exemple, il reste à une distance inférieure à r). Pour cela, on calcule le noyau de viabilité de l'espace des contraintes « dilaté » d'une distance r .

Avec la suite des noyaux dilatés, il est possible de définir une fonction de « transgression » (Aubin *et al.*, 2011), pour les états situés à l'extérieur du noyau de viabilité. Les trajectoires qui restent dans le noyau de viabilité de l'ensemble dilaté des contraintes ne s'éloigneront jamais plus d'une distance r de l'ensemble des contraintes. Cependant, si le bassin de capture ne contient pas l'intégralité du noyau du dilaté, il se peut que le lac ne puisse jamais revenir à l'intérieur de l'ensemble initial des contraintes.

Les fonctions de sécurité et transgression sont en quelque sorte la « version spatiale » de la fonction de crise introduite par Luc Doyen et Patrick Saint-Pierre qui, en version temporelle, mesure le temps passé en dehors de l'ensemble des contraintes.

Incertitudes sur les variables et les contrôles, perturbations

La prise en compte des incertitudes est particulièrement importante quand le système ne peut plus être ramené dans le noyau de viabilité s'il quitte le bassin de capture, comme dans la figure 6. En effet, à l'intérieur du noyau de viabilité, il existe toujours une suite de contrôles qui permet d'y rester. Mais en suivant d'autres contrôles, il est bien sûr possible d'en sortir.

Même dans le cas où le bassin de capture couvre tout l'espace, en cas de sortie du noyau de viabilité le temps de crise peut être très long et les contrôles

pour revenir dans l'ensemble des contraintes peuvent aussi être très coûteux. C'est pourquoi il est important de prendre en compte les incertitudes sur les variables et les contrôles, et de considérer la robustesse des trajectoires vis-à-vis des incertitudes et perturbations éventuelles.

S'il existe une incertitude sur la position du système dans l'espace des états, il est crucial de rester suffisamment éloigné de la frontière. C'est le cas si la mesure du phosphore dissous est très imprécise.

Le problème est le même s'il y a une incertitude sur l'effet des contrôles : si un contrôle n'a pas l'effet attendu, le système peut sortir du noyau de viabilité alors qu'il aurait dû y rester. Par exemple, si la régulation une année prévoit une réduction des apports de phosphore de 10 % et si les exploitants refusent de mettre en œuvre la réglementation, l'état du système n'évoluera pas tel que prévu.

Il en va de même en cas de perturbation inattendue, qui a pour effet de « recalculer » le lac dans un autre état que celui prévu par la théorie. Par exemple, des pluies d'une intensité exceptionnelle peuvent entraîner un lessivage important et augmenter de manière imprévue l'apport de phosphore dans le lac.

Dans tous ces cas, la distance à la frontière du noyau de viabilité est un indicateur de la robustesse du système (Alvarez et al, 2010), de même pour un système en train d'évoluer dans un bassin de capture. La distance à la frontière permet de définir des indicateurs de robustesse pour les trajectoires, en calculant le minimum ou la moyenne de la robustesse de tous les états par lesquels passe la trajectoire, ou encore en utilisant un taux d'actualisation qui affecte un poids à la robustesse des états parcourus par la trajectoire décroissant avec le temps. Le taux d'actualisation est initialement un terme économique qui permet de faire une correction des prix afin de raisonner en monnaie "constante", il s'agit par exemple de tenir compte d'un taux d'intérêt ou d'un taux d'inflation. La figure 11 (gauche) montre comment utiliser la distance à la frontière pour comparer différents états et trajectoires dans le problème du lac. Par exemple, le point B n'est pas un état robuste : il est près de la frontière du noyau, en cas de perturbation même faible le lac quitterait le noyau de viabilité. De plus, une trajectoire issue de cet état et correspondant à une diminution importante des apports de phosphore ($u = -0.06$) ne suffit pas pour rester dans le noyau de viabilité. La trajectoire correspondant à un effort supplémentaire ($u = -0.075$) reste à proximité de la frontière, elle est donc exposée pendant une longue période à quitter le noyau de viabilité en cas de perturbation même faible.

De manière semblable à la fonction de sécurité, il est possible de définir une fonction de robustesse et de garantir une évolution du système à une distance au moins r de la frontière du noyau de viabilité. Pour cela on calcule le noyau de viabilité du noyau initial érodé. Dans cette zone (en sombre sur la figure 11 à droite), le lac pourra continuer à évoluer dans l'ensemble des contraintes même en cas d'une perturbation ou d'une erreur de taille r .

La fonction de robustesse, basée sur la distance à la frontière du noyau de viabilité, est un indicateur de robustesse aux perturbations : il indique la taille maximale des perturbations que le système peut supporter sans que son mode de fonctionnement en soit affecté. En effet, une perturbation de taille inférieure à la robustesse laissera le système dans le noyau de viabilité. Dans le nouvel état, après perturbation, on pourra donc trouver une suite de contrôles qui maintienne le système dans le noyau.

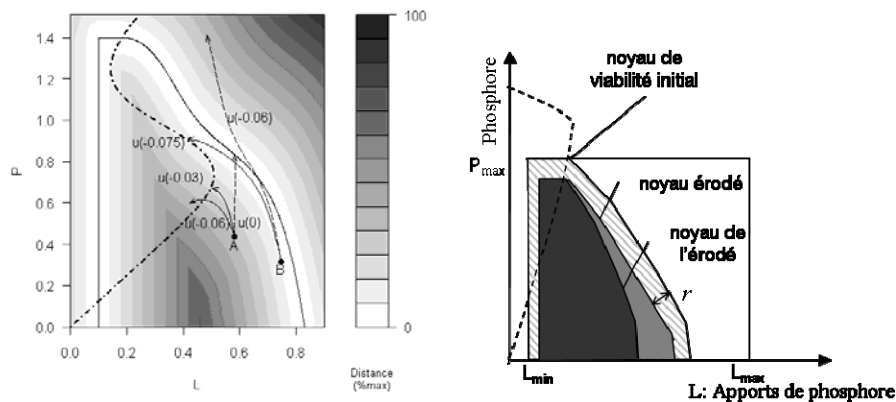


Fig. 11. À gauche : carte des distances à la frontière du noyau de viabilité. Les trajectoires en pointillé quittent le noyau de viabilité, en moins de 15 ans à partir de B (malgré l'effort constant de réduction des apports, le lac devient eutrophe 30 ans plus tard). La trajectoire issue de A pour le même effort ($u=-0.06$) voit sa robustesse augmenter au cours du temps. La trajectoire issue de B avec un effort de réduction plus important ($u=-0.75$) reste 40 ans près de la frontière du noyau. À droite : le noyau de viabilité du noyau érodé (en gris foncé) délimite la zone de l'espace où le lac reste toujours à une distance r de la frontière du noyau de viabilité initial.

En revanche, pour les perturbations d'intensité supérieure à la robustesse, c'est l'indicateur de résilience qui devient pertinent : cet indicateur combine les perturbations envisagées et le temps de crise (ou une autre fonction de coût). Il associe, à chaque état du système, l'inverse du coût de retour dans le noyau de viabilité, dans la pire des situations obtenues, suite à l'occurrence d'une des perturbations envisagées.

Ainsi, un état du système, dont la résilience est infinie, a un coût de retour nul quelle que soit la perturbation appartenant à l'ensemble des perturbations envisagées ; c'est-à-dire que quelle que soit cette perturbation, l'état du système reste dans le noyau de viabilité. Par exemple, si on considère des perturbations d'intensité inférieure à r , ce sont les états du noyau érodé. Le point A de la figure 12 a une résilience infinie pour les perturbations d'intensité inférieure à 0.15.

Lorsqu'un état du système a une résilience finie, il existe une perturbation qui lui fait quitter le noyau de viabilité, mais il reste néanmoins toujours dans le bassin de capture. Il existe donc une suite de contrôle qui permet de ramener le lac dans le noyau de viabilité. La résilience mesure dans ce cas le coût de retour dans le noyau de viabilité. C'est le cas du point B de la figure 12.

Lorsque la résilience est nulle, il existe une perturbation qui fait quitter le bassin de capture et le noyau de viabilité ne peut plus être atteint.

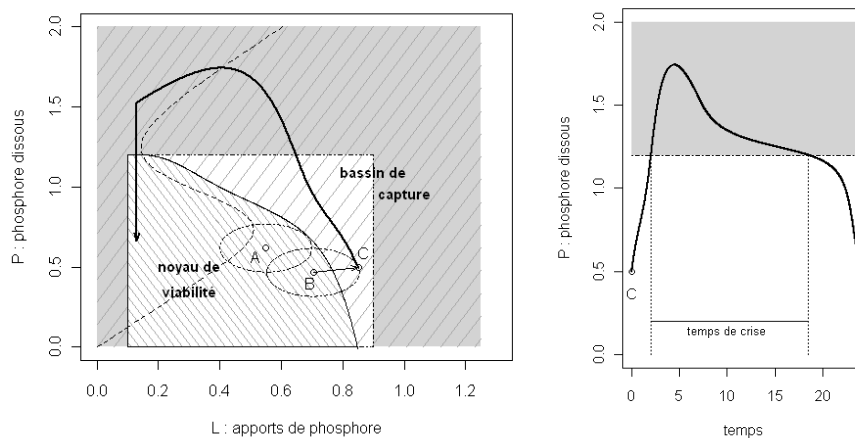


Fig. 12. À gauche : La robustesse au point A est de 0.15 : une perturbation d'intensité maximale 0.15 ne fait pas quitter le noyau de viabilité, la résilience du système au point A pour de telles perturbations est donc infinie. Au point B, une perturbation de même intensité peut éloigner l'état du lac au pire jusqu'au point C, hors du noyau de viabilité. Le lac quittera inéluctablement l'état oligotrophe avant d'y revenir. Le temps de crise associé au point C représente un coût inverse de la résilience.

Conclusions et perspectives

La théorie de la viabilité, en se concentrant sur les possibilités de maintenir un système en évolution dans une zone d'intérêt, permet de définir des indicateurs liés à l'état actuel du système et aussi à son devenir. En admettant par avance la possibilité d'une régulation et ses modalités, la théorie de la viabilité offre des indicateurs de l'état d'un système qui prennent en compte la dynamique future et les efforts de contrôle. Il est ainsi possible de définir et d'évaluer des politiques d'action respectant le principe de précaution, ou à l'inverse des politiques s'en démarquant explicitement.

Pour un système situé dans le noyau de viabilité, il existe toujours une suite de contrôles qui le maintiendra dans l'ensemble des contraintes (et plus précisément dans le noyau lui-même). Dans ce cas, outre les indicateurs liés au

coût du contrôle, il est possible de définir des stratégies (sécurité et robustesse), garantissant un éloignement permanent d'une zone dangereuse : c'est le principe de précaution, qui prend en compte un certain niveau d'incertitude, d'erreur ou d'inefficacité des contrôles.

Pour un état du système situé dans l'ensemble des contraintes, mais hors du noyau de viabilité, deux indicateurs sont disponibles (outre les coûts de contrôle) : le temps de sortie, c'est-à-dire la durée maximale pendant laquelle le système va encore satisfaire les contraintes, et le temps de crise, la durée minimale pendant laquelle les contraintes seront violées. La connaissance de ces indicateurs et des coûts associés à la violation des contraintes peut permettre à un gestionnaire de remettre en cause le système lui-même, par exemple en proposant de nouvelles politiques de régulation.

La fonction de transgression, la robustesse (dans un bassin de capture) et la résilience permettent d'évaluer des politiques de compromis hors du principe de précaution. Ces indicateurs permettent de définir des zones de l'espace où le risque de violation des contraintes peut être précisé et où le coût de violation peut être contenu. Nous envisageons dans des travaux futurs de relier ces indicateurs au concept de vulnérabilité tel qu'utilisé en gestion des risques.

La mise en œuvre de l'étude de viabilité suppose de connaître la dynamique et l'influence des actions qui s'exercent sur le système. Elle suppose aussi d'être capable de traduire les fonctionnements intéressants sous forme d'ensembles de contraintes.

La principale difficulté de cette approche reste la complexité algorithmique de l'étude de viabilité, qui limite drastiquement la dimension des problèmes que la méthode peut traiter. La mise en œuvre effective de la méthode est relativement récente. Dans le domaine de l'environnement, elle a donné lieu jusqu'à maintenant à des travaux théoriques : par exemple, dans le projet Déduction du programme ADD 2006 de l'ANR concernant la sylviculture et la déforestation, également, sur les stratégies de pâturage pour préserver des communautés d'oiseaux sans nuire à l'alimentation du bétail (Tichit *et al.*, 2007), sur la viabilité d'une économie avec ressource épuisable (Martinet et Doyen, 2007). Certaines applications pratiques montrent que la méthode est très prometteuse : au cours du projet Incalin du programme PNRA 2006 de l'ANR, l'étude de viabilité des dynamiques d'affinage du Camembert ont permis de trouver une procédure d'affinage satisfaisante d'une durée de quatre jours inférieure à la procédure classique (Sicard *et al.*, 2011).

Références

Alvarez, I., Martin, S., Mesmoudi, S., 2010. Describing the result of a classifier to the end-user: geometric-based sensitivity, in Helder Coelho, Rudi Studer, Michael Wooldridge (Eds.), *Frontiers in Artificial Intelligence and*

- Applications, Proceedings of ECAI 2010, the 19th European Conference on Artificial Intelligence, Lisboa, Portugal, August, 16-20, Amsterdam, IOS Press, 835-840.*
- Aubin, J.-P., 1991. *Viability Theory*, Basel, Birkhäuser.
- Aubin, J.-P., Bayen, A., Saint-Pierre, P., 2011. *Viability Theory : New directions*, Berlin, Springer.
- Carpenter, S.R., Ludwig, D., Brock, W.A., 1999. Management of eutrophication for lakes subject to potentially irreversible change, *Ecological Applications*, 9, 751–771.
- Doyen, L., Saint-Pierre, P., 1997. Scale of viability and minimal time of crisis, *Set-valued Analysis*, 5, 3, 227-246.
- Martin, S., 2004. The cost of restoration as a way of defining resilience: a viability approach applied to a model of lake eutrophication, *Ecology and Society*, 9, 2, 8. [online] URL: <http://www.ecologyandsociety.org/vol9/iss2/art8>
- Martinet, V., Doyen, L., 2007. Sustainability of an economy with an exhaustible resource : A viable control approach, *Resource and Energy Economics*, 29, 1, 17-39.
- Saltelli, A., Chan, K., Scott, M. (Eds), 2000. *Sensitivity Analysis*, Chichester, John Wiley & Sons.
- Serra, J. (Ed), 1988. *Image Analysis and Mathematical Morphology*, London, Academic Press.
- Sicard, M., Reuillon, R., Mesmoudi, S., Perrot, N., Alvarez, I., Martin, S., 2011. Viability theory to explore complex food process : Application to cheese ripening optimization, *Food Control*, 23, 2, 312-319.
- Tichit, M., Doyen, L., Lemel, J.-Y., Renault, O., Durant, D., 2007. A co-viability model of grazing and bird community management in farmland. *Ecological Modelling*, 206, 3-4, 277-293.