Changer pour durer : problèmes de viabilité et de résilience

Sophie Martin

8 avril 2010

Cette communication a pour objet de proposer à la discussion une métaphore mathématique de l'expression, titre de ce colloque, "changer pour durer".
Cette métaphore mathématique s'inscrit dans le cadre de la théorie mathématique de la viabilité initiée par Jean-Pierre Aubin dans son livre intitulé "Viability Theory" en 1991.
Motivée par les sciences économiques, sociales, biologiques et cognitives, plutôt que par la physique, l'objet de la théorie de la viabilité est autant de proposer des métaphores mathématiques pouvant aider à observer l'évolution des systèmes particuliers à l'aide de nouveaux outils conceptuels, que d'expliquer mathématiquement et numériquement les évolutions gouvernées par ces "systèmes évolutionnaires", qui apparaissent en économie, en sciences cognitives, en théorie des jeux, en biologie, aussi bien qu'en automatique. De tels systèmes ne sont pas déterministes, mais régissent sous incertitude des évolutions soumises à des contraintes de viabilité et parfois guident ces évolutions vers des cibles afin de les atteindre en temps fini. Il s'agit essentiellement de faire émerger les rétroactions sous-jacentes qui permettent de réguler le système et de trouver les mécanismes de sélection mis en œuvre.
Dans l'expression "changer pour durer", il y a deux verbes "changer" et "durer" dont nous proposerons des métaphores mathématiques dans un premier temps déconnectées. Nous montrerons ensuite comment la liaison par la préposition "pour" conduit à la définition de problèmes de viabilité puis de résilience.

Changer et durer

Nous proposons toust d'abord de considérer que cette expression "changer pour durer" concerne de façon très générique un système S sur lequel nous allons faire plusieurs hypothèses. La première hypothèse est que ce système S peut être décrit par un vecteur de variables d'état : en mécanique, lorsque le système étudié est un solide, ces variables sont communément la position, la vitesse de son centre de gravité,... Quand on considère un socio-écosystème, la détermination de ces variables n'est pas aussi aisée et sujette à débats. Supposons néanmoins que l'état du système que nous considérons peut être décrit pas n variables regroupées dans le vecteur x. Ces variables peuvent être continues, à valeurs réelles, ou discrètes.

Revenons à l'expression "changer pour durer". Et intéressons nous tout d'abord au terme, "changer". Ce qui va pouvoir changer, évoluer dans notre système S, ce sont les valeurs des variables qui le décrivent. Il faut ainsi prêter attention aux caractéristiques du système qui évoluent d'elles-mêmes ou que l'on souhaite voir évoluer dans la détermination des variables qui décrivent S. Pour des variables réelles, la variation des valeurs du vecteur d'état s'écrit x'. A chaque instant t, ces valeurs sont susceptibles de varier, $x'(t)$ rassemble les variations à l'instant t des valeurs $x(t)$ du système. De quoi ces variations peuvent-elles dépendre à chaque instant ? De manière générale, elles peuvent dépendre de l'état du système donc des valeurs de $x(t)$ et d'actions de gestion extérieures au système exercées à l'instant t et notées $u(t)$, qui se combinent selon une fonction f déterminée à partir d'observations du comportement du système. La traduction mathématique est la suivante : $x'(t) = f(x(t), u(t))$. L'action exercée au temps t, $u(t)$ appartient à l'ensemble $U(x(t))$ de toutes les actions qu'il est possible d'exercer sur le système lorsque celui-ci est dans l'état $x(t)$. L'hypothèse de la connaissance de cette fonction f implique une connaissance précise du fonctionnement du système. Cependant, il reste souvent des incertitudes non négligeables sur les valeurs de certains paramètres. Ces incertitudes sont prises en compte en rajoutant $v(t)$ dans l'écriture $x'(t) = f(x(t), u(t), v(t))$ avec $v(t)$ appartenant à un ensemble de valeurs possibles $V(x(t))$, par exemple un ensemble de valeurs possibles pour un paramètre de la fonction f, ou pour l'impact d'un facteur extérieur.
Ainsi, nous sommes placés dans le contexte de l'étude d'un système dont nous percevons les changements par l'intermédiaire des variations des valeurs des variables du vecteur d'état qui le décrit. Ces variations dépendent de l'état du système et d'actions exterieures. Les incertitudes sur les valeurs de certains paramètres, par exemple, rendent éventuellement cette correspondance multivoque.

La deuxième partie de l'expression "changer pour durer" concerne le fait de "durer", durer éternellement ou un certain temps ?. Il faut fixer un horizon temporel T (éventuellement infini). Le fait de souhaiter étudier le système S sur une période T et d'avoir construit pour cela le vecteur de ses variables d'état x, ainsi que la dynamique d'évolution des valeurs de ces variables $x' = f(x, u, v)$, suppose implicitement que cette représentation du système va rester valide au cours de cette période. Autrement dit que la validité du modèle (x, x') va durer au moins T. Pour que celui-ci reste valide, il peut y avoir des seuils à ne pas franchir pour certaines variables qui décrivent le système. Par exemple, si S est un système électronique, la température doit rester inférieure à un seuil pour ne pas altérer ses composants. Dans le cas d'une chaine trophique, la disparition d'une espèce peut provoquer une modification de la structure trophique et l'ancien modèle n'est plus valide. Ainsi l'assurance de la validité du modèle pour une durée T peut-elle impliquer des contraintes sur les variables qui décrivent S : de manière très générale, parmi l'ensemble des valeurs possibles des variables d'état du système, nous pouvons distinguer un sous-ensemble K

d'états tel que si le vecteur décrivant l'état du système, x, appartient à K, alors le modèle (x, x') est valide ; si $x(t)$ en évoluant quitte K, alors la validité même de la représentation de S par le modèle (x, x') est remise en cause.

Certaines variables composant le vecteur x décrivant le système peuvent également être soumises à des contraintes intrinsèques (une quantité comme une concentration est nécessairement positive) ou liées à sa survie : l'angle que fait un avion avec le plan horizontal doit être compris entre des bornes afin d'éviter la chute.

Considérons maintenant qu'un opérateur, un gestionnaire agit sur le système S, s'ajoutent aux contraintes imposées par la préservation de la validité du modèle, des contraintes sur les valeurs des variables d'état qui traduisent cette fois le comportement du système souhaité par cet opérateur ou gestionnaire. A l'extrême, le souhait peut être que les variables du système conservent leur valeur au temps initial $t = 0$. Nous pouvons également envisager des contraintes plus lâches plus compatibles avec des systèmes en mouvement, comme les valeurs de variables devant rester entre des bornes, par exemple une quantité de phosphates dissous dans l'eau d'un lac inférieure à un seuil pour que celui-ci reste dans un état d'eau claire et non d'eau croupie.

Dans notre métaphore mathématique, chacune de ces contraintes, soit stricte parce qu'elle engage la validité du modèle ou la survie du système, soit plus souple lorsqu'elle correspond à un comportement souhaité du système, peut être représentée par un sous-ensemble de l'ensemble des états possibles. Ainsi, pour que l'ensemble des contraintes soit respecté, il faut que l'état du système x appartienne à tous ces sous-ensembles c'est à dire à leur intersection, qui est encore un sous-ensemble de l'espace des états que nous notons encore K. Ces contraintes restent satisfaites pour la période T si pour tout t entre le temps 0 et le temps T, $x(t)$ reste dans K. Ce que nous envisageons comme susceptible de durer dans notre métaphore mathématique est ainsi l'appartenance du vecteur d'états du système à un sous-ensemble particulier des états possibles représentant les propriétés souhaitées du système.

"Changer pour durer"

La préposition "pour" introduit un lien entre "changer" représenté par la dynamique f et "durer" représenté par le sous-ensemble K. L'évolution des valeurs des variables décrivant le système S est gouvernée par f ; l'ensemble des propriétés souhaitées du système est décrit par le sous-ensemble K. Ces propriétés sont conservées ou durent sur une période T si $x(t)$ soumis aux variations décrites par f reste dans K pour tous les temps compris entre le temps 0 et le temps T.

A priori, il n'y a aucune raison que partant d'un état x du système appartenant au sous-ensemble K et suivant la dynamique f sur une période de durée T, l'état du système au cours du temps, $x(t)$, reste dans K, donc que les caractéristiques du système que K représente durent.
Etudier la compatibilité entre une dynamique f et un ensemble de contraintes

K est l'objet essentiel de la théorie mathématique de la viabilité. Alors que les autres approches comme la théorie du contrôle optimal cherchent à maximiser un critère, cette théorie cherche d'abord à éviter les catastrophes ou au moins les états non désirés. Le concept essentiel de cette théorie est celui de noyau de viabilité qui rassemble tous les états du système à partir desquels il existe une suite d'actions qui permet de conserver l'état du système dans le sous-ensemble d'états souhaités K.
A partir d'un état du système qui appartient au noyau de viabilité, il est donc possible d'agir de façon à concilier changement et durée, évolution de l'état du système et préservation de certaines de ses caractéristiques. Inversement, si l'état du système n'appartient pas au noyau de viabilité, quelles que soient les actions de l'opérateur ou du gestionnaire sur le système, l'une de ces caractéristiques souhaitées au moins sera nécessairement perdue avant l'horizon temporel fixé.

Une propriété remarquable est que le calcul du noyau de viabilité donne également les contrôles s'ils existent, qui permettent de suivre effectivement une évolution du système au cours de laquelle les caractéristiques décrites par le sous-ensemble K sont conservées, durent. Par exemple, les diminutions des quantités de rejets de phosphates qu'il faut imposer pour que l'état d'eau claire d'un lac soit préservé. Le calcul du noyau de viabilité permet de passer de "changer" et "durer" à "changer pour durer" : quelles actions entreprendre pour conserver les propriétés du système décrites par K.

Poursuivons la métaphore : il se peut que le système quitte le noyau de viabilité à la suite d'un accident, d'une perturbation. Par exemple, l'augmentation brusque de la concentration en phosphates de l'eau d'un lac à la suite d'un événement pluvieux de forte intensité. La question qui se pose alors est celle des actions à entreprendre pour que le système revienne dans le noyau de viabilité. Ceci est désormais un problème de résilience.
Le terme résilience, en effet, était à la fin du 19ème siècle utilisé en physique des matériaux pour désigner la capacité d'un métal à retrouver sa forme initiale suite à une déformation produite par un choc. Son utilisation s'est ensuite étendue au cours du 20ème siècle, d'abord aux Etats-Unis, dans les domaines de la psychologie, de l'informatique, de l'écologie, de l'économie, des sciences sociales également. Les objets changent mais reste l'idée commune de désigner par le mot "résilience" la capacité du système étudié à retrouver une ou plusieurs propriétés malgré des bouleversements dus à des perturbations que le système ne maîtrise pas. Les indices, indicateurs classiques dans les systèmes dynamiques relient la résilience à des caractéristiques du retour à l'équilibre. La relier au noyau de viabilité des propriétés du système à préserver est une généralisation qui permet de s'affranchir de l'hypothèse selon laquelle les systèmes sans perturbation sont à équilibre, dominés par des forces stabilisatrices qui le ramènent à un équilibre dès lors qu'une perturbation l'en éloigne, hypothèse très controversée dans les sciences du vivant.

Cette étude de la résilience permet de distinguer les états du système résilients de ceux qui ne le sont pas : les états résilients sont ceux à partir desquels on peut conduire le système dans le noyau de viabilité où la préservation des qualités souhaitées est assurée, l'ensemble de ces états résilients correspond au bassin de capture du noyau de viabilité dans la terminologie de la théorie mathématique de la viabilité. Ne sont pas résilients les états à partir desquels le noyau de viabilité ne peut plus être atteint. Par exemple, des lacs qui restent eutrophes provoquant l'asphyxie des poissons par prolifération d'algues malgré l'arrêt des pollutions aux phosphates. Dans le cas des états résilients, l'étude fournit également les politiques d'actions à mener pour retourner effectivement dans le noyau de viabilité. Par exemple, les équipements, les organisations économiques à mettre en place pour faciliter le retour à la vie normale après des événements climatiques extrêmes.

Conclusion

Si le système étudié S est décrit par un vecteur d'état, si ses changements au cours du temps sont perçus comme des variations des valeurs de ce vecteur d'état, $x'(t)$, obéissant à une dynamique éventuellement incertaine $x'(t) = f(x(t), u(t), v(t))$, si les propriétés du système, dont on souhaite évaluer la capacité de durer sur une période T, sont représentées par un sous-ensemble de l'espace des états possibles, K, alors deux concepts de la théorie mathématique de la viabilité, le noyau de viabilité et le bassin de capture, permettent d'apporter des réponses à la question : quels changements pour durer.
Si l'état du système appartient au noyau de viabilité, son calcul donne les suites d'actions à opérer pour que la propriété dure effectivement au moins pour une période de durée T ; si l'état n'appartient pas au noyau de viabilité mais à son bassin de capture, celui-ci donne les actions à mener pour atteindre le noyau de viabilité et éventuellement à un moindre coût ; si l'état n'appartient ni au noyau, ni au bassin de capture, non seulement la propriété ne dure pas sur la période T qu'elles que soient les actions envisagées, mais en plus elle ne peut être restaurée avant T : dans ce dernier cas il faut par exemple envisager d'autres modes d'action possibles, ce qui va avoir pour conséquence de modifier la dynamique $x'(t) = f(x(t), u(t), v(t))$, et recommencer l'analyse de viabilité et de résilience, l'état en question appartiendra peut-être au nouveau noyau de viabilité ou au nouveau bassin de capture.

Les concepts de la théorie de la viabilité ont été utilisés à plusieurs reprises dans les sciences de l'environnement : à partir des équations classiques de Lotka-Volterra, Bonneuil [2003] étudie les conditions que le terme d'intéraction (ou fonction de correction) doit satisfaire pour que la coexistence soit possible, autrement dit, pour que l'ensemble des états où les deux espèces coexistent soit un domaine de viabilité.

Pour étudier un modèle dynamique lié à la gestion de ressources renouvelables, Béné et al. [2001], Martinet and Doyen [2007] et Rapaport et al. [2006] utilisent le concept de noyau de viabilité pour déterminer, lorsque cela est possible, les options de gestion à choisir pour garantir la pérennité du système. Ils soulignent, en particulier, les configurations de surexploitation irréversible conduisant à l'extinction de la ressource. Dans la même perspective, Mullon et al. [2004], Aubin and Saint-Pierre [2005], Doyen et al. [2007] et Chapel et al. [2008] suivent une approche de type viabilité pour modéliser des écosystèmes marins. Ils montrent comment le noyau de viabilité peut être utilisé pour définir les bons états en indiquant ceux qu'il faut absolument éviter. Les travaux de Martin [2004] portent sur l'eutrophisation d'un lac en prenant en compte l'environnement socio-économique, un problème de viabilité pour conserver un état d'eau clair et un problème de résilience pour retrouver cet état après eutrophisation. De Lara et al. [2007] ont utilisé l'éclairage de la théorie de la viabilité pour proposer des indicateurs de durabilité .

Références

J.-P. Aubin and P. Saint-Pierre. Des ≪ noyaux ≫ dans les quotas de pêche. *La Recherche*, 385 :80–81, 2005.

C. Béné, L. Doyen, and D. Gabay. A viability analysis for a bio-economic model. *Ecological Economics*, 36 :385–396, 2001.

N. Bonneuil. Making Ecosystem Models Viable. *Journal of Mathematical Biology*, 65 :1081–1094, 2003.

L. Chapel, G. Deffuant, S. Martin, and C. Mullon. Defining yield policies in a viability approach. *Ecological Modelling*, 212(1-2) :10–15, 2008.

M. De Lara, L. Doyen, T. Guilbaud, and M.J. Rochet. Is a management framework based on spawning-stock biomass indicators sustainable ? A viability approach. *Ices Journal of Marine Science*, 64 :761–767, 2007.

L. Doyen, M. DeLara, J. Ferraris, and D. Pelletier. Sustainability of exploited marine ecosystems through protected areas : A viability model and a coral reef case study. *Ecological Modelling*, 208(2-4) :353–366, 2007.

S. Martin. The cost of restoration as a way of defining resilience : a viability approach applied to a model of lake eutrophication. *Ecology and Society*, 9 (2), 2004. URL `http://www.ecologyandsociety.org/vol9/iss2/art8`.

V. Martinet and L. Doyen. Sustainable management of an exhaustible resource : a viable control approach. *Journal of Resource and Energy Economics*, 29(1) : 17–39, 2007.

C. Mullon, P. Cury, and L. Shannon. Viability model of trophic interactions in marine ecosystems. *Natural Resources Modelling*, 17(1) :27–58, 2004.

A. Rapaport, J.P. Terreaux, and L. Doyen. Sustainable management of renewable resource : a viability approach. *Journal of Mathematics and Computer Modeling*, 43 :466–483, 2006.