

# Indicateurs de sécurité et de restauration dynamiques

Isabelle Alvarez, Cemagref, Laboratoire d'ingénierie des systèmes complexes, BP 50085, 63172 Aubière Cedex, [isabelle.alvarez@cemagref.fr](mailto:isabelle.alvarez@cemagref.fr), UPMC, Laboratoire d'Informatique de Paris 6, Paris, France

Sophie Martin, Cemagref, Laboratoire d'ingénierie des systèmes complexes, BP 50085, 63172 Aubière Cedex, France, [sophie.martin@cemagref.fr](mailto:sophie.martin@cemagref.fr)

Olivier Dordan, Université de Bordeaux, 33405, Talence, France, [Olivier.Dordan@u-bordeaux2.fr](mailto:Olivier.Dordan@u-bordeaux2.fr)

Xavier Litrico, Cemagref, UMR G-EAU, 34196 Montpellier Cedex 5, France, [xavier.litrico@cemagref.fr](mailto:xavier.litrico@cemagref.fr)

Patrick Saint Pierre, Lastre et Vimades, VIMADES, 75005 Paris, France, [Patrick.Saint.Pierre@gmail.com](mailto:Patrick.Saint.Pierre@gmail.com)

## Résumé

La gestion de systèmes agricoles ou environnementaux, dans une perspective de gestion durable, conduit à réfléchir à des indicateurs de l'état actuel du système mais aussi de son évolution. La gestion durable peut être envisagée comme la conservation de propriétés intéressantes du système. Quand ces propriétés s'expriment sous la forme d'un ensemble de contraintes, la théorie de la viabilité permet de définir des indicateurs dynamiques qui prennent en compte la situation actuelle et les possibilités d'action dans le futur.

**Mots-clés : viabilité, gestion durable, indicateurs, robustesse, sécurité**

## 1. Introduction

Les systèmes agricoles au sens large et leur environnement peuvent être décrits comme des systèmes dynamiques : par exemple, des activités agricoles utilisent chaque année des engrais phosphatés. Ces engrais ne se fixent pas dans le sol mais descendent par infiltration ou écoulement de surface vers les écosystèmes aquatiques – rivières, lacs, baies. Les concentrations excessives de substances nutritives dans ces bassins aquatiques provoquent la prolifération de nappes d'algues.

Ces systèmes agricoles sont soumis à des contraintes de rentabilité bien sûr, mais pas uniquement. En effet, les populations riveraines d'un lac souhaitent qu'il conserve un état d'eau claire (oligotrophe), et éviter la prolifération impose ainsi des contraintes supplémentaires sur les activités agricoles, en l'occurrence, limiter les apports d'engrais dans le bassin versant.

Enfin, ces systèmes agricoles sont soumis à des incertitudes. Viennent immédiatement à l'esprit les aléas climatiques, mais pour rester dans l'exemple du lac, un événement pluvieux intense peut provoquer un ruissellement important qui a pour conséquence immédiate d'augmenter brusquement la concentration de phosphore dissous.

Face à des systèmes qui évoluent soumis à des contraintes et des incertitudes, quelles informations fournir au gestionnaire?

Tout d'abord, des informations sur l'état actuel du système, comme la jauge à essence. Le passage du lac d'un état oligotrophe à un état eutrophe (prolifération des algues), dépend essentiellement d'un seuil de la concentration en phosphore à ne pas dépasser : si l'on connaît ce seuil, la connaissance de la concentration actuelle et donc de l'écart à la concentration seuil est une information instantanée importante.

Concernant les états futurs du système, des informations sont souvent fournies sous forme de probabilités : la probabilité de défaillance d'un système sur un intervalle de temps par exemple, ou sa fiabilité qui vaut 1 moins la probabilité précédente. Ces informations se soucient du futur mais sans nécessairement être corrélées à la situation actuelle du système, ni aux actions futures du gestionnaire sauf éventuellement par l'intermédiaire de scénarios prédéfinis.

Or, les actions futures ont une influence sur l'état futur du système, et plutôt que se poser la question des conséquences d'une suite d'actions, on peut inverser le problème et chercher quelles suites d'actions si elles existent peuvent produire les effets souhaités sur l'état du système. Autrement dit, en reprenant l'exemple du lac, quelles sont les apports de phosphore que l'état oligotrophe du lac peut supporter?

La théorie mathématique de la viabilité développe précisément des concepts et outils pour étudier la compatibilité entre des dynamiques contrôlées et des ensembles de contraintes. Ses deux concepts principaux sont le noyau de viabilité et le bassin de capture. L'objectif de l'article est de montrer qu'ils peuvent permettre de construire des indicateurs pertinents sur l'état futur du système. L'exemple de la gestion des exploitations agricoles riveraines d'un lac servira d'illustration tout au long de l'article. Dans un premier temps, nous décrirons donc plus en détail cet exemple, en particulier les dynamiques considérées, les modes d'actions envisagés et les propriétés souhaitées du système ; puis nous montrerons comment les concepts de la théorie de la viabilité, le noyau de viabilité et le bassin de capture permettent d'apporter des réponses à des questions de gestion durable : pour une situation actuelle, les propriétés désirées pourront-elles être conservées dans le futur? Si la réponse est oui, quelles sont les actions à mener pour y arriver effectivement? Dans le cas contraire, ces propriétés peuvent-elles être restaurées? En suivant quelles actions? Dans un second temps, nous verrons comment construire des indicateurs plus fins que ces indicateurs binaires d'appartenance ou non aux ensembles noyau de viabilité et bassin de capture.

## 2. La gestion durable à l'aide de la théorie de la viabilité

### 2.1. L'exemple des exploitations riveraines d'un lac

La théorie de la viabilité (Aubin, 1991) est particulièrement bien adaptée pour étudier des problèmes de gestion durable. On s'appuiera dans cet article sur l'exemple du lac décrit dans (Martin, 2005).

On considère comme illustration le système constitué par un lac et les exploitations agricoles qui l'entourent. Les riverains souhaitent bénéficier d'un lac oligotrophe pour la qualité de l'eau et les services que le lac peut rendre : eau claire, baignade, pêche, irrigation, etc. Les exploitants agricoles souhaitent pouvoir exercer leur activité. Il se trouve qu'un des impacts de l'activité agricole est le déversement de phosphates dans le lac (par ruissellement, ou lessivage des sols, par exemple). Cet apport de phosphore d'origine agricole se combine au phosphore dissous dans le lac et au phosphore recyclé depuis les sédiments suivant une dynamique bien connue décrite par exemple dans (Carpenter et al, 1999). Pour des valeurs élevées de phosphore dissous, se produit un phénomène d'eutrophisation : le lac change d'aspect (voir figure 1), les eaux sont troubles, la biodiversité est affectée, la qualité des services rendus par le lac diminue très fortement. De plus la dynamique présente un phénomène d'hystérésis, c'est-à-dire que le retour à un état oligotrophe, quand il est possible, ne se produit qu'à des valeurs d'apport de phosphore beaucoup plus faibles que celles à laquelle l'eutrophisation s'est produite, comme le montre la figure 2.



Figure 1. Lac eutrophe entouré d'exploitations agricoles: les eaux sont troubles et les algues apparentes.

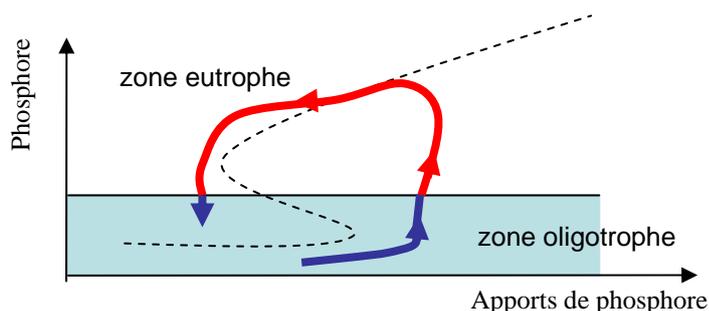


Figure 2. Comportement d'hystérésis. Les apports de phosphore doivent diminuer très fortement pour que la dynamique du lac le ramène à un état oligotrophe. Cela est dû à la forme de pli de la ligne des équilibres (en pointillé) de la dynamique.

Dans cet exemple le système composé du lac et des agriculteurs peut être décrit de manière très schématique par un système dynamique dans un espace à 2 variables, les apports de phosphore, notés  $L$  et le phosphore dissous, noté  $P$ . C'est l'espace des états du lac. En effet, lorsque le recyclage du phosphore par les poissons et le zooplancton peut être négligé, la variation de la concentration du phosphore dissous est une somme de trois termes décrivant : (1) l'élimination du phosphore, proportionnel à sa concentration, (2) les apports de phosphore dans le lac et (3) le recyclage par les sédiments qui est une fonction (sigmoïde) de la concentration (Carpenter et al., 1999).

Les préoccupations des protagonistes peuvent se traduire par des contraintes sur ces variables. Pour maintenir le lac dans un état oligotrophe, le phosphore dissous ne doit pas dépasser une valeur maximale  $P_{max}$ . Pour exercer leur activité de manière satisfaisante, les exploitations doivent être autorisées à déverser indirectement une quantité minimale  $L_{min}$  de phosphore. Pour des raisons environnementales, les apports en phosphore sont limités à une valeur maximale  $L_{max}$ . Ces contraintes délimitent un sous-espace de l'espace d'état du lac, nommé ensemble de contraintes, comme le montre la figure 3. Cet ensemble regroupe les états du système qui sont considérés comme satisfaisants par toutes les parties. Dans cette zone, le lac est dans un état oligotrophe, les exploitations agricoles peuvent exercer leur activité et les rejets dans l'environnement sont limités. L'ensemble de contrainte délimite la zone dans laquelle le système du lac doit évoluer en permanence.

On considère de plus que les apports de phosphore peuvent être régulés, par exemple en imposant une diminution des apports annuels de phosphore dans le lac. Dans cet exemple on considérera une régulation qui limite la vitesse de variation des apports annuels de phosphore (ce type de régulation est assez fréquent, c'est ce qui existe au niveau international pour limiter les émissions de  $CO_2$ ).

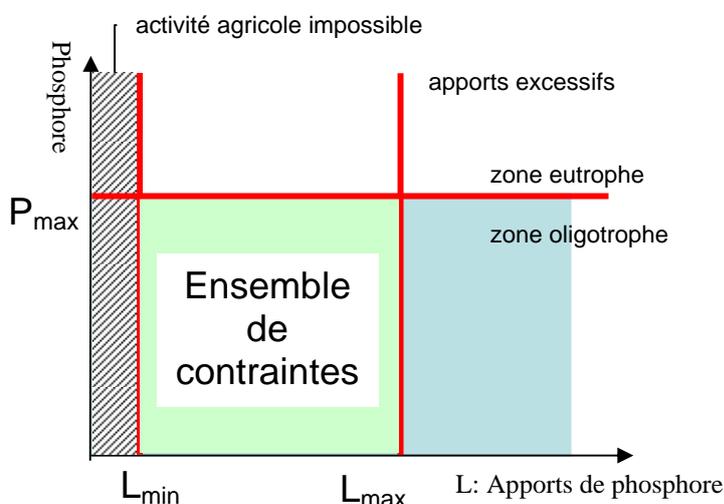


Figure 3. Ensemble de contraintes dans le cas du système des exploitations riveraines du lac. Cet ensemble est délimité par la valeur maximale du phosphore dissous, et les valeurs minimales et maximales des apports de phosphore.

## 2.2. L'étude de viabilité du système exploitations riveraines du lac

### 2.2.1. L'ensemble de contraintes

L'ensemble des contraintes délimite la zone dans laquelle on souhaite que le système du lac et ses exploitations riveraines puisse évoluer en permanence. Cependant cela peut ne pas être possible, comme le montre la figure 4. Tout comme un véhicule lancé à fond dans un virage reste sur la route tant qu'il ne l'a pas quittée, le lac peut être dans une dynamique d'augmentation très rapide du phosphore dissous que rien ne peut plus enrayer : dans ce cas il quittera l'ensemble des contraintes et deviendra eutrophe inéluctablement, même si le lac reste oligotrophe jusqu'à ce que le phosphore dépasse un certain seuil. Le lac peut être ainsi condamné à subir une eutrophisation alors qu'il est encore dans la zone oligotrophe.

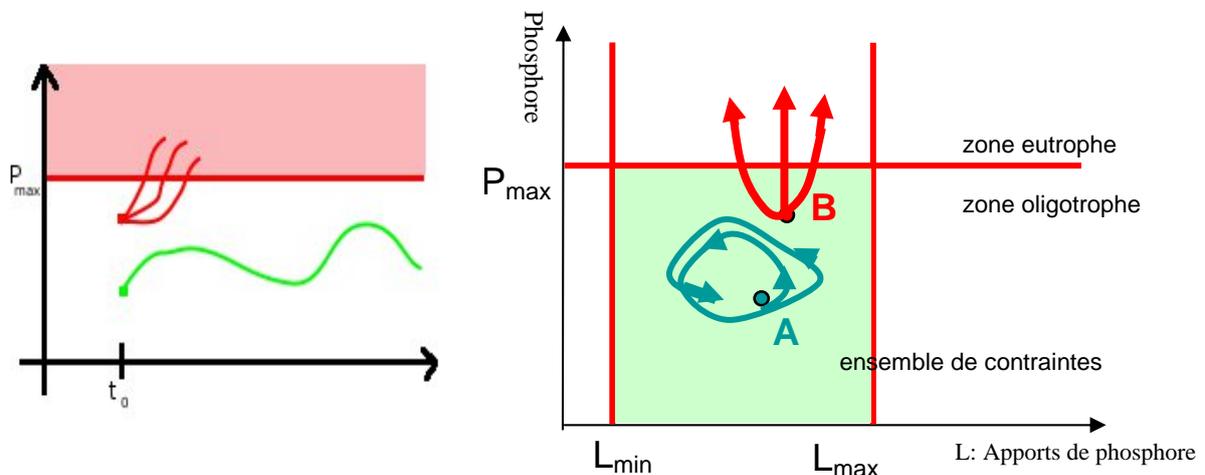


Figure 4. Tous les points de l'ensemble de contraintes ne sont pas nécessairement des états souhaitables pour le lac. Par exemple, à partir du point B, tous les efforts de contrôle sont inutiles : il n'est pas possible de maintenir le niveau de phosphore dissous en-dessous du seuil d'eutrophisation. En revanche, à partir du point A, on peut trouver une suite de régulation qui permet de conserver le phosphore dissous en dessous du seuil critique.

### 2.2.2. Le noyau de viabilité et son complémentaire

L'étude de viabilité consiste justement à rechercher le sous-ensemble de l'espace des contraintes dans lequel le système peut évoluer indéfiniment. C'est le noyau de viabilité de l'ensemble des contraintes.

A l'intérieur du noyau de viabilité, il existe une fonction de contrôle qui permet de rester dans le noyau, et donc de respecter les contraintes au cours du temps. Lorsque le noyau de viabilité ne coïncide pas avec l'ensemble des contraintes, les états qui appartiennent à l'ensemble des contraintes, mais pas au noyau de viabilité, sont des états du système pour lesquels les contraintes de viabilité sont satisfaites aujourd'hui. Cependant, quels que soient les contrôles mis en œuvre, les contraintes seront nécessairement violées en temps fini. C'est ce que montre la figure 5.

Dans le complémentaire du noyau de viabilité dans l'ensemble des contraintes, le lac est certain de subir une eutrophisation dans le futur (même si son état actuel est encore satisfaisant).

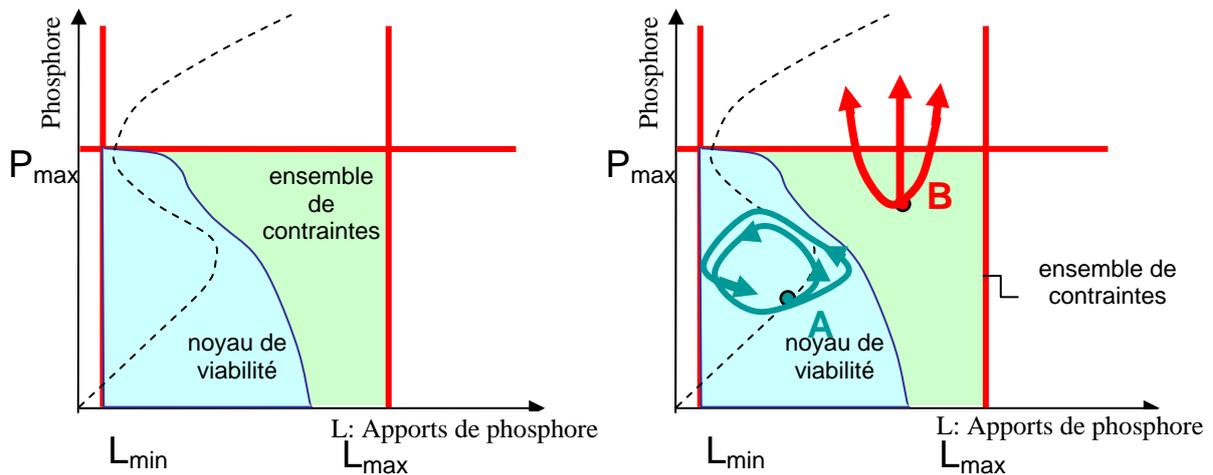


Figure 5. Noyau de viabilité du système exploitations riveraines du lac. Pour les états situés dans le noyau, il existe toujours une suite de contrôles qui permet au lac de rester dans le noyau. Pour les points du complémentaire (en vert), toutes les trajectoires possibles sortent de l'espace des contraintes en un temps fini. En pointillé, la ligne des équilibres du système.

### 2.2.3. Le bassin de capture et son complémentaire

L'étude de viabilité comporte aussi la recherche des états à partir desquels le système peut être ramené dans le noyau de viabilité même s'il n'y était pas à l'origine. L'ensemble de ces états est le bassin de capture du noyau de viabilité. Dans le cas du système du lac et des exploitations riveraines, il s'agit de s'intéresser aux cas où le lac n'est pas déjà dans le noyau de viabilité. C'est-à-dire que soit le lac est déjà dans un état eutrophe (il n'est pas dans l'ensemble des contraintes), soit le lac subira une eutrophisation dans le futur (le lac est encore dans l'ensemble des contraintes mais dans le complémentaire du noyau de viabilité).

La théorie de la viabilité fournit les outils permettant de calculer le bassin de capture. Pour les états qui font partie du bassin de capture, il existe une suite de contrôles qui permet de ramener le lac dans un état oligotrophe et de l'y maintenir indéfiniment.

Dans certains cas, le bassin de capture couvre l'espace tout entier. C'est le cas pour l'exemple proposé dans les figures précédentes, le bassin de capture est matérialisé figure 6. Il s'agit du bassin de capture en temps fini. Si on exigeait que le lac rejoigne le noyau de viabilité en un temps limité, le bassin de capture ne couvrirait pas tout l'espace.

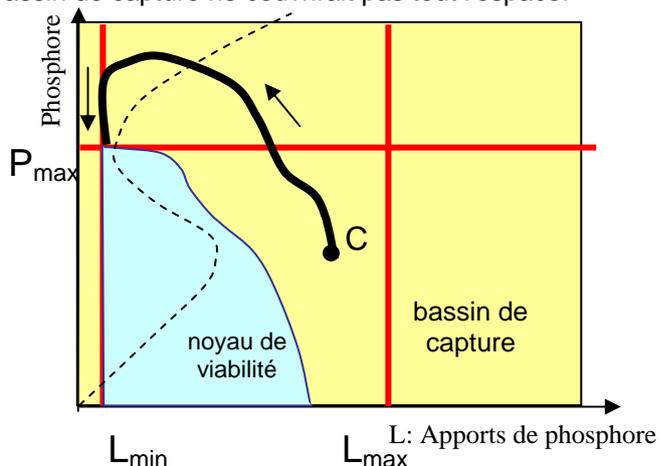


Figure 6. Bassin de capture du noyau de viabilité du système du lac. En temps fini (mais non borné), il est toujours possible de ramener le lac dans un état oligotrophe et de l'y maintenir.

Dans d'autres cas, le bassin de capture ne couvre qu'une partie de l'espace. Pour les points de l'ensemble complémentaire, l'eutrophisation est inéluctable et sera définitive tant que le système n'est pas modifié. La figure 7 montre un exemple d'un lac de ce type.

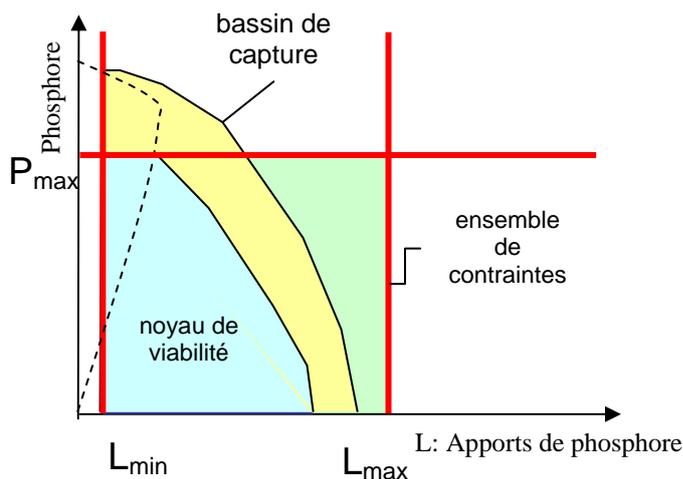


Figure 7. Bassin de capture d'un lac irréversible. La zone verte représente les états de l'ensemble de contraintes à partir desquels le lac, oligotrophe à l'origine, subira une eutrophisation irréversible dans le futur.

Par modification du système, on entend par exemple un changement de la méthode de régulation. Avec des contrôles plus rigoureux ou de nature différente, le système est différent, le noyau de viabilité et le bassin de capture doivent être recalculés. Dans le système du lac, pour certains lacs dits "irréversibles", il n'est pas possible de revenir à un état oligotrophe, même en supprimant complètement les apports de phosphore, c'est-à-dire en arrêtant toute activité humaine à proximité. La dernière ressource dans ce cas est de modifier le lac lui-même, par exemple en envisageant une vidange du lac (comme pour les retenues de barrage), et un curage des fonds.

### 3. Les indicateurs de la viabilité

#### 3.1. Des indicateurs pertinents pour chaque situation

##### 3.1.1. Dans le noyau de viabilité

Le fait de savoir que la situation actuelle appartient au noyau de viabilité assure qu'il existe au moins une politique de contrôle qui permet de conserver l'état du système dans l'ensemble des contraintes. Cependant, toutes les situations incluses dans le noyau de viabilité ne sont pas équivalentes. En effet, des informations sur les contrôles à mettre en œuvre pour assurer effectivement la viabilité du système peuvent être très pertinentes. Une situation peut rester viable sans nécessiter de contrôle, une autre au contraire peut demander pour rester viable des actions intenses. La fonction d'inertie associée à une situation donnée mesure l'intensité maximale du contrôle qu'il sera nécessaire d'effectuer pour assurer la viabilité dans le futur. La figure 8 montre trois évolutions viables associées à trois fonctions de contrôle à partir du point viable A. Le maximum de la fonction de contrôle en trait plein est le plus petit des trois. C'est elle qui va servir à évaluer l'inertie dans la situation A, notée  $I$  sur la figure : si la fonction d'inertie en un point A du noyau vaut  $I$ , alors il existe une évolution issue de A qui reste viable en nécessitant l'utilisation de contrôles au cours du temps d'intensité au plus égale à  $I$ .

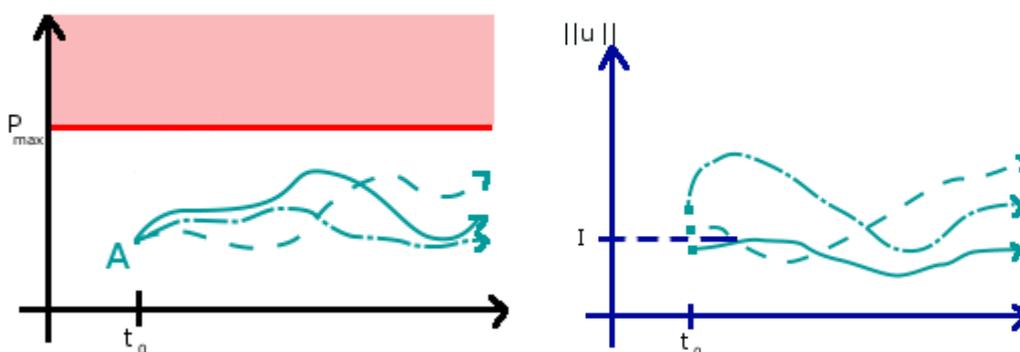


Figure 8. Trois évolutions viables issues d'un point viable A (à gauche) et leur fonction de contrôle associée (à droite). L'inertie,  $I$ , est le plus petit des maximums des valeurs de la fonction de contrôle au cours du temps.

Si dans le système considéré, ce n'est pas tant l'intensité du contrôle qui importe mais l'intensité de ses variations. En considérant comme contrôle non plus le contrôle lui-même mais sa dérivée, il est possible au prix de traiter un problème d'une dimension supplémentaire d'associer à chaque situation du noyau le maximum des variations de contrôle nécessaires pour assurer effectivement la viabilité dans le futur.

### 3.1.2. Hors du noyau de viabilité dans l'ensemble de contraintes

Lorsque la situation est dans l'ensemble des contraintes mais hors du noyau de viabilité, cela signifie qu'à l'instant actuel, les contraintes sont satisfaites, mais que dans le futur, quelles que soient les actions menées le système est condamné à les violer.

Cependant, là encore, les situations dans l'ensemble des contraintes mais hors du noyau de viabilité ne sont pas identiques. L'information indiquant le temps maximal (nécessairement fini) durant lequel les contraintes peuvent encore être satisfaites peut être cruciale : elle permet de connaître le temps dont on dispose pour inventer d'autres solutions. Dans la terminologie de la théorie de la viabilité, cette information est appelée temps de sortie.

La figure 9 montre trois évolutions issues du point de l'ensemble des contraintes non viable B correspondant à trois fonctions de contrôle différentes. L'évolution en trait plein quitte l'ensemble des contraintes le plus tardivement. C'est elle qui va servir à évaluer le temps de sortie dans la situation B, notée  $t_{sortie}$  sur la figure : si la fonction de temps de sortie en un point B non viable de l'ensemble des contraintes vaut  $t_{sortie}$ , alors il existe une évolution issue de B qui satisfait les contraintes pour une durée  $t_{sortie}$  mais sans espoir de faire mieux.

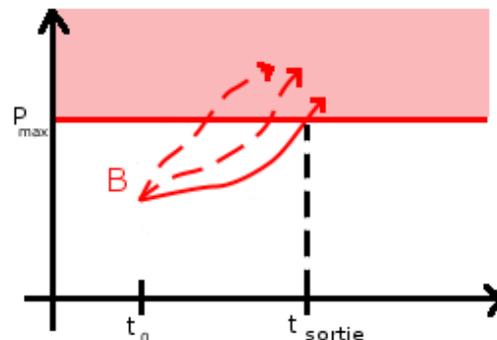


Figure 9. Trois évolutions issues d'un point de l'ensemble des contraintes non viable B. Le temps de sortie,  $t_{sortie}$ , est celui de l'évolution qui quitte l'ensemble des contraintes le plus tard.

### 3.1.3. Dans le bassin de capture

Lorsque la situation appartient au bassin de capture du noyau de viabilité, cela signifie qu'il existe une fonction de contrôle du système qui permet d'atteindre le noyau de viabilité en temps fini. Ce temps est nul bien sûr pour les éléments de ce noyau. Hors du noyau ce temps est fini et non nul. Pour une situation donnée, sa valeur minimale sur l'ensemble des évolutions possible est une information importante. Elle permet de savoir le temps minimum nécessaire pour retourner dans le noyau de viabilité. Elle est appelée temps de crise (Doyen et Saint-Pierre, 1997).

La figure 10 montre trois évolutions issues du point du bassin de capture C correspondant à trois fonctions de contrôle différentes. L'évolution en trait plein atteint le noyau de viabilité le plus rapidement. C'est elle qui va servir à évaluer le temps de crise dans la situation C, notée  $t_{crise}$  sur la figure : si la fonction de temps de crise en un point C du bassin de capture vaut  $t_{crise}$ , alors il existe une évolution issue de C qui atteint le noyau de viabilité au bout d'une durée  $t_{crise}$  mais sans espoir de faire mieux.

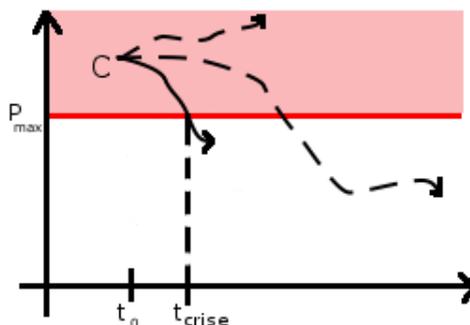


Figure 10. Trois évolutions issues d'un point du bassin de capture C. Le temps de crise,  $t_{crise}$ , est celui de l'évolution qui atteint le noyau de viabilité le plus rapidement.

Le temps de retour dans le noyau n'est pas nécessairement le seul coût à prendre en compte pour évaluer les efforts à fournir pour atteindre le noyau de viabilité. D'autres fonctions de l'état et du contrôle peuvent également être considérées.

### 3.2. Prise en compte des incertitudes

#### 3.2.1. Incertitudes sur l'ensemble des contraintes : fonction de sécurité et de restauration

La théorie de la viabilité permet de prendre en compte une partie des incertitudes au niveau de la dynamique, par exemple en considérant que l'évolution au cours du temps n'est pas un vecteur parfaitement déterminé, mais qu'il appartient à un ensemble de vecteurs possibles. En revanche, l'incertitude sur les paramètres du modèle nécessite une approche classique d'analyse de sensibilité, pour évaluer dans quelle mesure le noyau de viabilité est affecté par la variation des paramètres (voir par exemple Saltelli et al, 2000).

La détermination des contraintes mérite une considération particulière. En effet, ce sont les parties prenantes qui fixent l'ensemble des contraintes, des marges d'appréciation sont donc à prévoir. Dans le cas du lac, par exemple, les exploitants agricoles peuvent avoir une marge d'imprécision sur le niveau minimal de rejet que leur activité peut entraîner. Même pour les contraintes qui sont fixées à la suite de mesures ou d'études spécifiques, des imprécisions peuvent subsister. Par exemple, le seuil de phosphore dissous acceptable peut ne pas être connu avec précision.

Pour l'ensemble de ces raisons, il peut être utile de faire une analyse de sensibilité particulière pour l'ensemble des contraintes, en considérant que la frontière de cet ensemble est susceptible de se déplacer. En utilisant les concepts et outils de morphologie mathématique (Serra, 1988), on peut considérer successivement les "érosions" de l'ensemble des contraintes, en retirant les points situés à une distance  $r$  de la frontière. On calcule le nouveau noyau de viabilité associé au nouvel ensemble de contraintes érodé. Ce nouveau noyau est nécessairement inclus dans les noyaux calculés avec un ensemble moins érodé, comme le montre la figure 11. En modifiant la valeur de  $r$ , et en calculant à chaque fois le nouveau noyau associé à cette érosion, on peut définir en chaque point du noyau initial une fonction de sécurité : c'est la valeur maximale de l'érosion pour laquelle le point est encore dans le noyau de viabilité de l'ensemble de contraintes érodé.

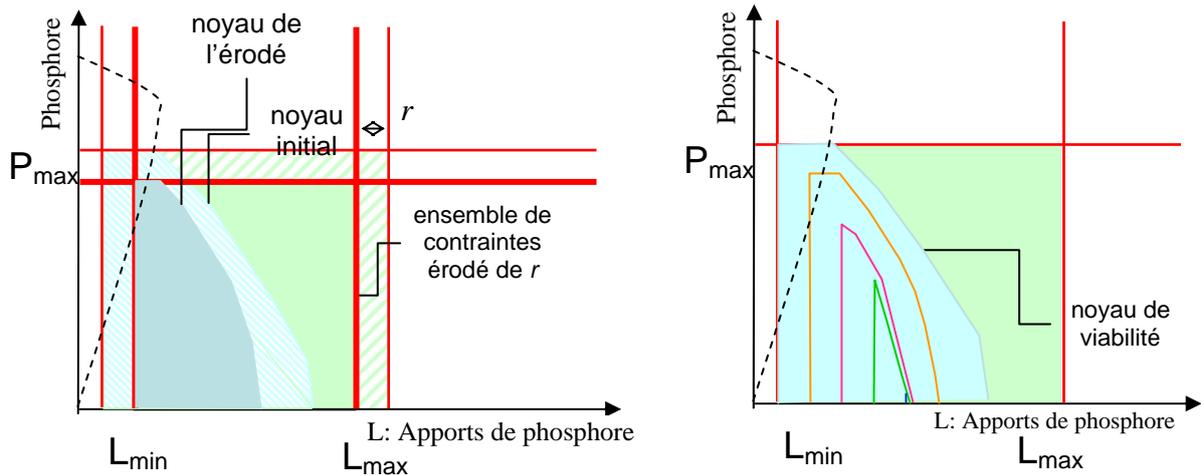


Figure 11. A droite : diminution du noyau de viabilité associé à un ensemble de contraintes érodé de  $r$  (distance  $L_1$ : les seuils des contraintes ont été déplacés vers l'intérieur d'une distance  $r$ ). A gauche : courbes de niveaux de la fonction de sécurité à l'intérieur du noyau de viabilité.

La fonction de sécurité permet de structurer le noyau de viabilité, et de rechercher des trajectoires garantissant un certain niveau de sécurité. Par exemple, on peut rechercher pour le problème du lac, des évolutions qui restent toujours à une distance  $r$  de la frontière de l'ensemble des contraintes. On est sûr, dans ce cas, de rester dans le noyau de viabilité même si les contraintes ont été fixées avec une erreur inférieure à  $r$ .

La construction de la fonction de sécurité peut être vue comme une analyse de sensibilité systématique du modèle. Elle est donc très coûteuse, puisqu'elle rajoute une dimension au problème. En revanche, si on dispose d'une estimation du niveau d'incertitude, il est possible de calculer directement le noyau correspondant à l'érosion à ce niveau. Les trajectoires qui restent dans le noyau de l'érodé seront toujours à une distance suffisante (par rapport au niveau d'incertitude) de la frontière de l'ensemble de contraintes. Entre deux trajectoires partant du même état et qui restent dans le noyau de viabilité, on aura donc intérêt à préférer la trajectoire dont la valeur de sécurité est la plus élevée.

Le même type de processus peut être utilisé pour déterminer les zones de l'espace d'état où le système du lac ne s'éloigne pas "trop" (par exemple, il reste à une distance inférieure à  $r$ ) de l'ensemble des contraintes, s'il en sort. Pour cela on calcule le noyau de viabilité de l'espace "dilaté" d'une distance  $r$ , comme le montre la figure 12.

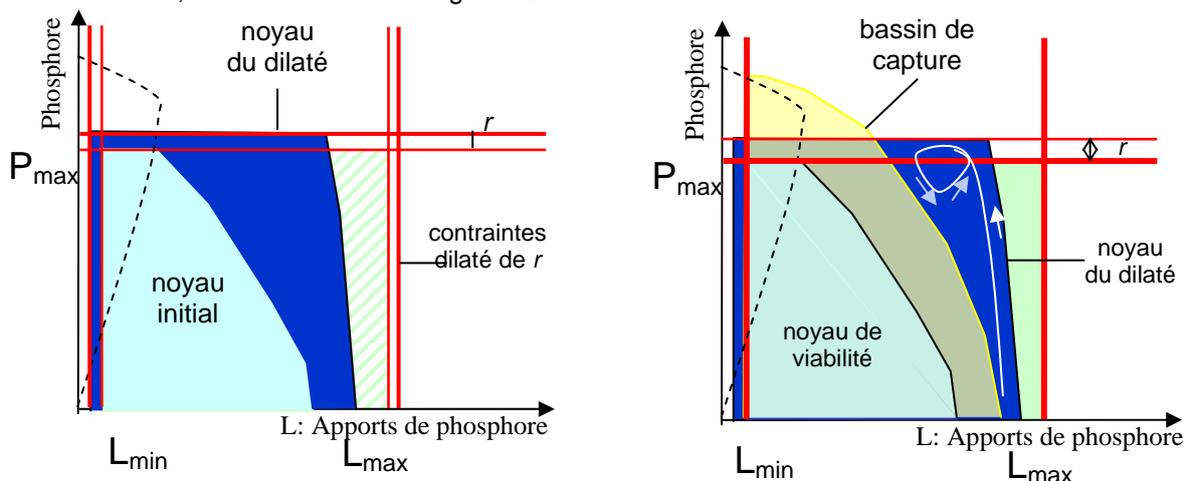


Figure 12. A gauche : augmentation du noyau de viabilité associé à un ensemble de contraintes dilaté de  $r$  (distance  $L_1$ : les seuils des contraintes ont été déplacés vers l'extérieur d'une distance  $r$ ). A droite : exemple de trajectoire dans le noyau dilaté qui sort inéluctablement par moment de l'ensemble de contrainte initial.

Avec la suite des noyaux dilatés, il est possible de définir une fonction de "restauration" (Aubin, communication personnelle), pour les états situés à l'extérieur du noyau de viabilité. Les trajectoires

qui restent dans le noyau de viabilité de l'ensemble des contraintes dilaté ne s'éloigneront jamais plus d'une distance  $r$  de l'ensemble des contraintes. Cependant, si le bassin de capture ne contient pas l'intégralité du noyau du dilaté, il se peut que le lac ne puisse jamais revenir à l'intérieur de l'ensemble des contraintes initial. C'est l'exemple de la trajectoire présentée en figure 12 (droite).

Les fonctions de sécurité et de restauration sont en quelque sorte la « version spatiale » de la fonction de crise introduite par Luc Doyen et Patrick Saint-Pierre qui, en version temporelle, mesure le temps passé en dehors de l'environnement (cf. 3.1.3).

### 3.2.2. Incertitudes sur les variables et les contrôles

La prise en compte des incertitudes est particulièrement importante quand le système ne peut plus être ramené dans le noyau de viabilité s'il le quitte, comme dans la figure 10. En effet, à l'intérieur du noyau de viabilité, il existe toujours une suite de contrôles qui permet d'y rester. Mais en suivant d'autres contrôles, il est bien sûr possible d'en sortir.

Même dans le cas où le bassin de capture couvre tout l'espace, en cas de sortie du noyau de viabilité le temps de crise peut être très long et les contrôles pour revenir dans l'ensemble des contraintes peuvent aussi être très coûteux. C'est pourquoi il est important de prendre en compte les incertitudes sur les variables et les contrôles, et de considérer la robustesse des trajectoires aux incertitudes et perturbations éventuelles.

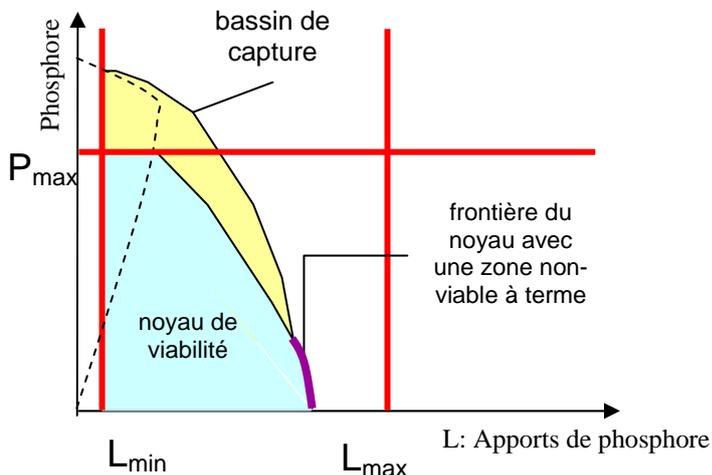


Figure 13. Cas d'un lac irréversible où il est possible de quitter le noyau de viabilité sans avoir jamais la possibilité d'y revenir.

Dans le cas de figure illustré par la figure 13, s'il existe une incertitude sur la position du système dans l'espace d'état, il est crucial de rester suffisamment éloigné de la frontière. C'est le cas si la mesure du phosphore dissous est très imprécise.

Le problème est le même s'il y a une incertitude sur l'effet des contrôles : si un contrôle n'a pas l'effet attendu, le système peut sortir du noyau de viabilité alors qu'il aurait dû y rester. Par exemple, si la régulation une année prévoit une réduction des apports de phosphore de 10%, si les exploitants refusent de mettre en œuvre la réglementation, l'état du système n'évoluera pas tel que prévu.

Il en va de même en cas de perturbation inattendue, qui a pour effet de "recaler" le lac dans un autre état que celui prévu par la théorie. Par exemple, des pluies d'une intensité exceptionnelle peuvent entraîner un lessivage important et augmenter de manière imprévue l'apport de phosphore dans le lac.

Dans tous ces cas, la distance à la frontière du noyau de viabilité est un indicateur de la robustesse du système (Alvarez et Martin, 2010), de même que pour un système en train d'évoluer dans un bassin de capture. La distance à la frontière permet de définir des indicateurs de robustesse pour les trajectoires, en calculant le minimum ou la moyenne de la robustesse de tous les états par lesquels passent la trajectoire, ou encore en utilisant un taux d'actualisation. La figure 11 (gauche) montre comment utiliser la distance à la frontière pour comparer différents états et trajectoires dans le problème du lac. Par exemple, le point B n'est pas un état robuste, car la trajectoire correspondant à une diminution constante des apports de phosphore égale à la moitié du maximum possible ne suffit pas pour rester dans le noyau de viabilité.

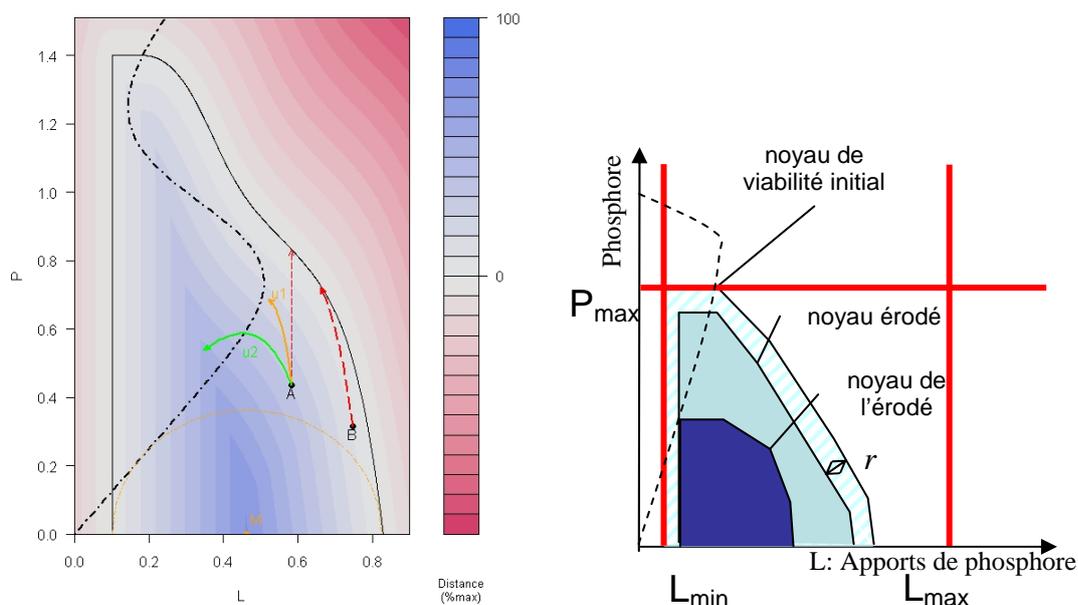


Figure 11. A gauche : Carte des distances à la frontière du noyau de viabilité. Les couleurs des trajectoires indiquent la robustesse. En rouge les trajectoires sortent du noyau en moins de 25 ans. En vert une trajectoire dont la robustesse croît avec le temps. A droite : le noyau de viabilité du noyau érodé délimite la zone de l'espace où le lac reste toujours à une distance  $r$  de la frontière du noyau de viabilité initial.

De manière semblable à la fonction de sécurité, il est possible de définir une fonction de robustesse et de garantir une évolution du système à une distance au moins  $r$  de la frontière du noyau de viabilité. Pour cela on calcule le noyau de viabilité du noyau initial érodé. Dans cette zone (en bleu foncé sur la figure 11), le lac évolue dans l'ensemble des contraintes même en cas de perturbations ou d'erreur de taille  $r$ .

### 3.2.3. Incertitudes sur les perturbations subies par le système

Lorsque l'on envisage un ensemble de perturbations susceptibles de se produire dans différents états du système, c'est l'indicateur de résilience qui devient pertinent : cet indicateur combine les perturbations envisagées et le temps de crise (ou une autre fonction de coût). Il associe à chaque état du système, l'inverse du coût de retour dans le noyau de viabilité dans la pire des situations obtenues suite à l'occurrence d'une des perturbations envisagées.

Ainsi, un état du système dont la résilience est infinie, a un coût de retour nul quelle que soit la perturbation appartenant à l'ensemble des perturbations envisagées ; c'est-à-dire que quelle que soit cette perturbation, l'état du système reste dans le noyau de viabilité. Lorsqu'un état du système a une résilience finie, il existe une perturbation qui le fait quitter le noyau de viabilité, mais il reste néanmoins toujours dans le bassin de capture. Lorsque la résilience est nulle, il existe une perturbation qui le fait quitter le bassin de capture et le noyau de viabilité ne peut plus être atteint.

## 4. Conclusions et perspectives

La théorie de la viabilité, en se concentrant sur les possibilités de maintenir un système en évolution dans une zone d'intérêt, permet de définir des indicateurs liés à l'état actuel du système et aussi à son devenir. En admettant par avance la possibilité d'une régulation et ses modalités, la théorie de la viabilité offre des indicateurs de l'état d'un système qui prend en compte la dynamique future et les efforts de contrôle. Il est ainsi possible de définir et d'évaluer des politiques d'action respectant le principe de précaution, ou à l'inverse des politiques s'en démarquant explicitement.

Pour un système situé dans le noyau de viabilité, il existe toujours une suite de contrôles qui le maintiendra dans la zone d'intérêt (et plus précisément dans le noyau lui-même). Dans ce cas, outre les indicateurs liés au coût du contrôle, il est possible de définir des stratégies (sécurité et robustesse)

garantissant un éloignement permanent d'une zone dangereuse : c'est le principe de précaution, qui prend en compte un certain niveau d'incertitude, d'erreur ou d'inefficacité des contrôles.

Pour un système situé dans la zone d'intérêt (l'ensemble des contraintes), mais hors du noyau de viabilité, deux indicateurs sont disponibles (outre les coûts de contrôle) : le temps de sortie, c'est-à-dire la durée maximale pendant laquelle le système va encore satisfaire les contraintes, et le temps de crise, la durée minimale pendant laquelle les contraintes seront violées. La connaissance de ces indicateurs et des coûts associés à la violation des contraintes peut permettre à un gestionnaire de remettre en cause le système lui-même, par exemple en proposant de nouvelles politiques de régulation.

La fonction de restauration, la robustesse (dans un bassin de capture) et la résilience permettent d'évaluer des politiques de compromis hors du principe de précaution. Ces indicateurs permettent de définir des zones de l'espace où le risque de violation des contraintes peut être précisé et où le coût de violation peut être contenu.

La mise en œuvre de l'étude de viabilité suppose de connaître la dynamique et l'influence des actions qui s'exercent sur le système. Elle suppose aussi d'être capable de traduire les fonctionnements intéressants sous forme d'ensembles de contraintes.

La principale difficulté de cette approche reste la complexité algorithmique de l'étude de viabilité, qui limite drastiquement la dimension des problèmes que la méthode peut traiter. La mise en œuvre effective de la méthode est relativement récente. Dans le domaine de l'environnement, elle a donné lieu jusqu'à maintenant à des travaux théoriques (ANR Dédution, 2005), mais certaines applications pratiques montrent que la méthode est très prometteuse (ANR PRNA Incalin, 2007 ; Sicard, 2010).

## Bibliographie

I. Alvarez, S. Martin et S. Mesmoudi, à paraître. Describing the Result of a Classifier to the End-User: Geometric-based Sensitivity". *Actes de European Conference on Artificial Intelligence* 2010.

Aubin, J.-P., 1991. *Viability Theory*. Basel, Birkhäuser.

S. R. Carpenter, D. Ludwig, and W. A. Brock. 1999. Management of eutrophication for lakes subject to potentially irreversible change, *Ecological Applications*, 9, 751–771.

Doyen, L., Saint-Pierre, P., 1997. Scale of Viability and Minimal Time of Crisis, *Set-valued Analysis*, 5, 3, 227-246.

S. Martin. 2004. The cost of restoration as a way of defining resilience: a viability approach applied to a model of lake eutrophication. *Ecology and Society*, 9(2).

A. Saltelli, K. Chan, and M. Scott. 2000. *Sensitivity Analysis*, Wiley.

Serra, J. 1988. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press.

Sicard, M. 2010. *Méthodes, concepts et outils des systèmes complexes pour la maîtrise des procédés alimentaires : application à l'affinage de camemberts*. Thèse AgroParisTech.