

Indicateurs de sécurité et de restauration dynamiques

*X. Litrico, I. Alvarez, S. Martin,
O. Dordan, P. Saint-Pierre*

xavier.litrico@cemagref.fr

*Colloque « Agir en situation d'incertitude »
Quelles constructions individuelles et collectives
des régimes de protection et d'adaptation en agriculture ?
Du 22 au 24 novembre 2010, Agropolis, Montpellier*



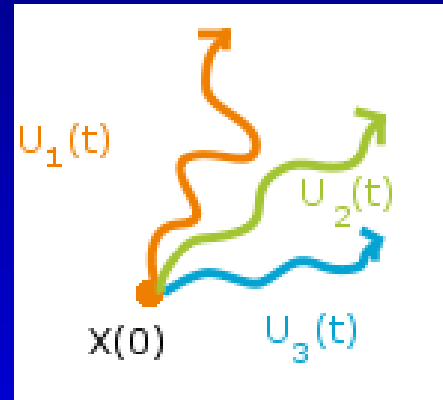
Introduction

- La gestion durable dans le cadre de la théorie de la viabilité est vue, non pas comme un problème d'optimisation, mais comme le maintien d'un système dans un ensemble de contraintes.
- Outre des problèmes de modélisation et de temps de calcul, se pose le problème de la gestion des incertitudes.

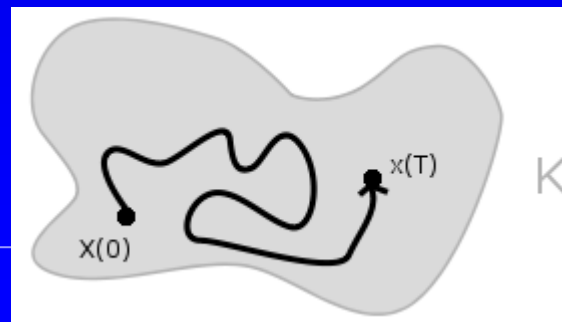
La théorie de la viabilité

- Etant donné un système dynamique contrôlé,

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), u(t)) \\ u'(t) \in U(x(t)) \end{cases}$$

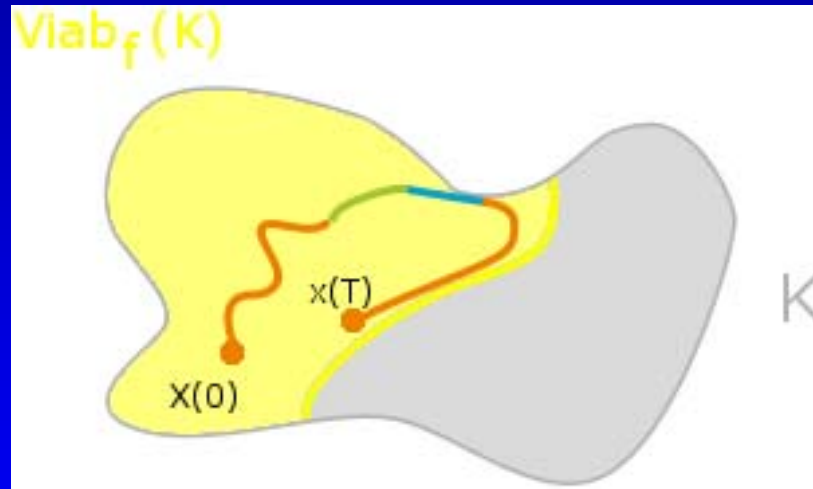


- l'objectif de la théorie de la viabilité est de développer des méthodes et outils pour maintenir l'état de ce système qui évolue dans un ensemble de contraintes.



La théorie de la viabilité

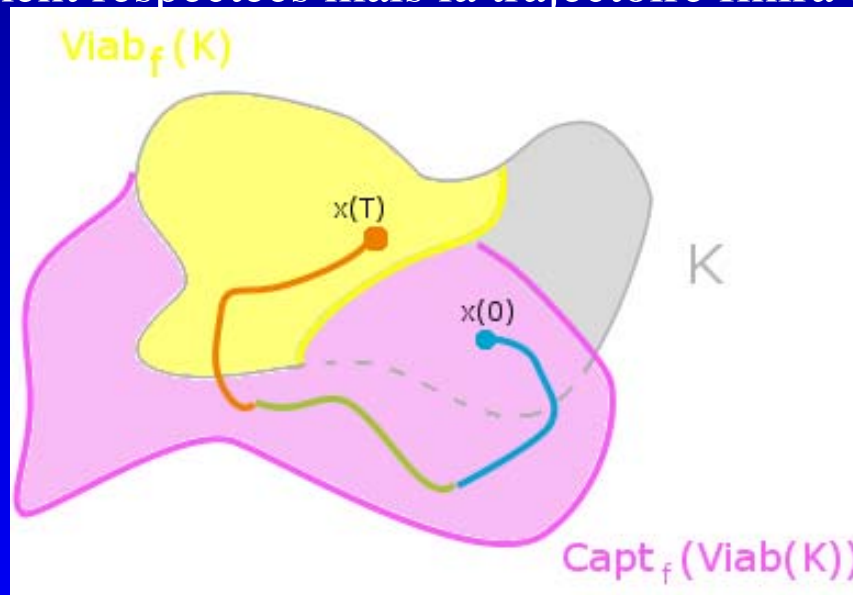
- Le noyau de viabilité est le sous-ensemble de l'espace des contraintes rassemblant les états du système à partir desquels il existe au moins une suite de contrôles qui permet de respecter les contraintes (une telle trajectoire reste dans le noyau)



- A partir d'un point appartenant au complémentaire du noyau dans l'ensemble des contraintes, toute trajectoire quittera l'ensemble des contraintes en temps fini.

La théorie de la viabilité

- Le bassin de capture du noyau de viabilité rassemble tous les états à partir desquels il existe au moins une suite d'actions qui permet d'atteindre le noyau (les propriétés ne sont pas (ou ne seront pas) nécessairement respectées mais la trajectoire finira dans le noyau)



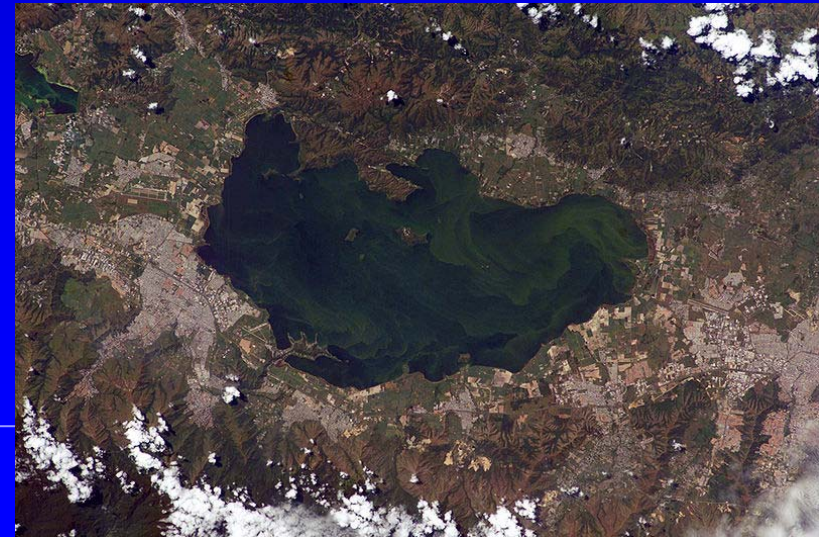
- A partir d'un point hors du bassin de capture, aucune trajectoire ne peut atteindre le noyau : même si les propriétés sont respectées aujourd'hui, il existe un temps fini à partir duquel elles ne pourront plus jamais l'être.

Exemples de problèmes traités

- Chapel *et al.* (2008) ont étudié quelles politiques de pêche permettent de maintenir entre des bornes les populations de cinq groupes d'espèces marines de l'écosystème du Benguela Sud (détritrus, phytoplancton, zooplancton, poissons pélagiques et poissons benthiques)
- Martin (2004) a étudié comment les variations des apports de phosphates dans un lac peuvent permettre de conserver ou retrouver un état oligotrophe.
- Martin S., 2004, The cost of restoration as a way of defining resilience: a viability approach applied to a model of lake eutrophication. *Ecology and Society* 9(2): 8.: <http://www.ecologyandsociety.org/vol9/iss2/art8/>
- Chapel L., Deffuant, G., Martin, S., Mullon, C. 2008, Defining yield policies in a viability approach. *Ecological Modelling*, 212(1-2), pp.10-15.

Indicateurs dynamiques de viabilité

- Objectif : rechercher des indicateurs de l'état actuel et de l'état futur d'un système dynamique
- Quels indicateurs dynamiques pour prendre en compte l'état futur



L'eutrophisation des lacs

- Le modèle du lac :
 - Les variables qui décrivent l'état du lac sont :
 - L : les apports de phosphates
 - P : la concentration en phosphates dans l'eau du lac
 - Les contrôles sont :
 - normes de diminution des apports de phosphates
 - rejets de phosphates taxés.

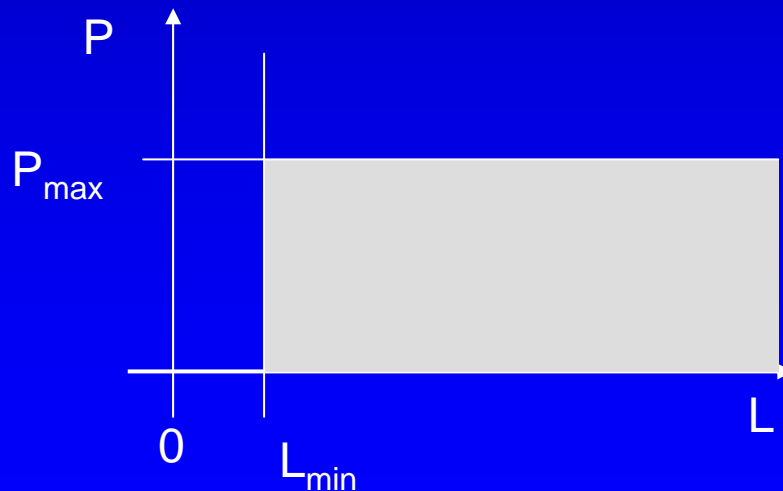
$$\frac{dL}{dt}(t) = u(t)$$

$$\frac{dP}{dt}(t) = -b.P(t) + L(t) + r \frac{P^q(t)}{m^q(t) + P^q(t)}$$

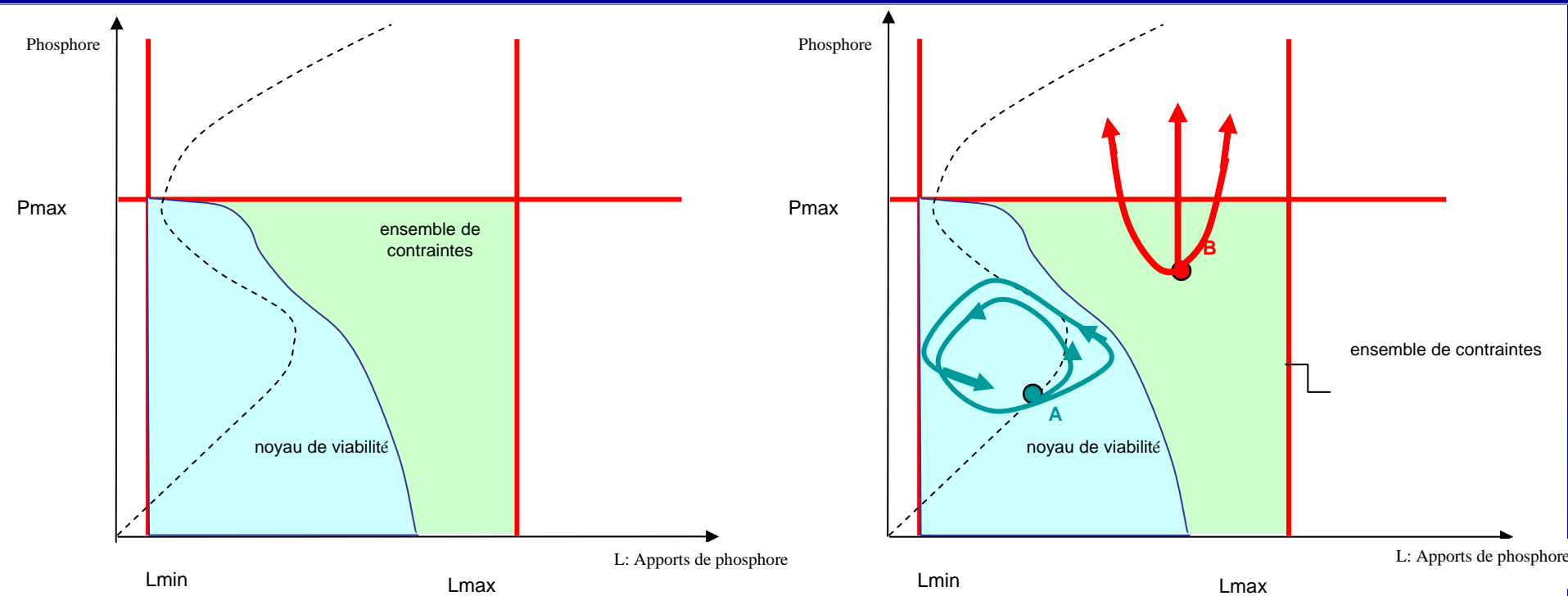
$$u \in U = [-VL_{\max}; VL_{\max}]$$

L'eutrophisation des lacs

- L'ensemble des états souhaités correspond à une propriété d'eau claire préservée tout en maintenant une activité agricole dans le bassin versant, ce qui peut se traduire par :
 - $L_{\min} \leq L$
 - $0 \leq P \leq P_{\max}$

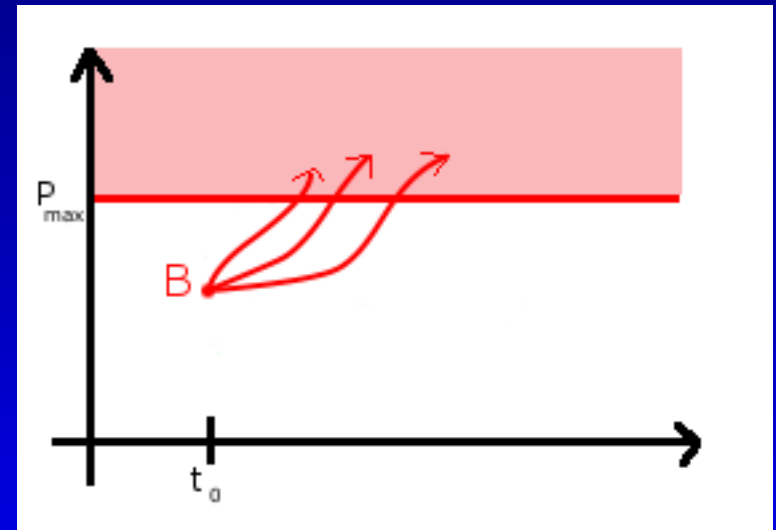
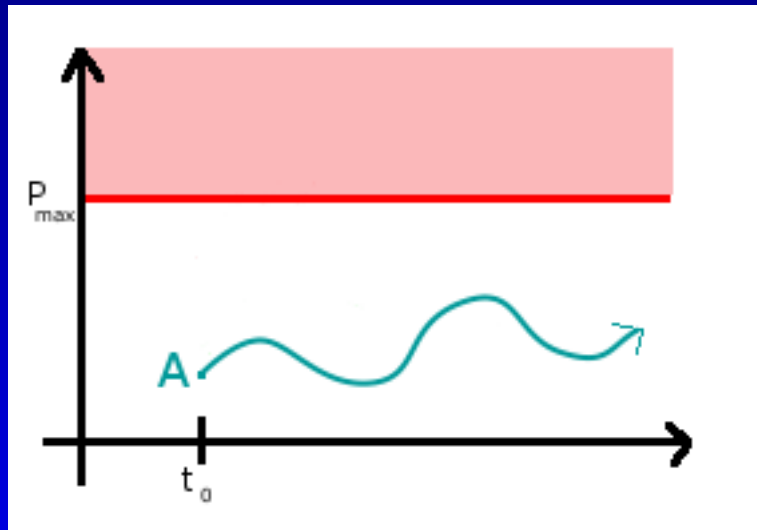


Noyau de viabilité



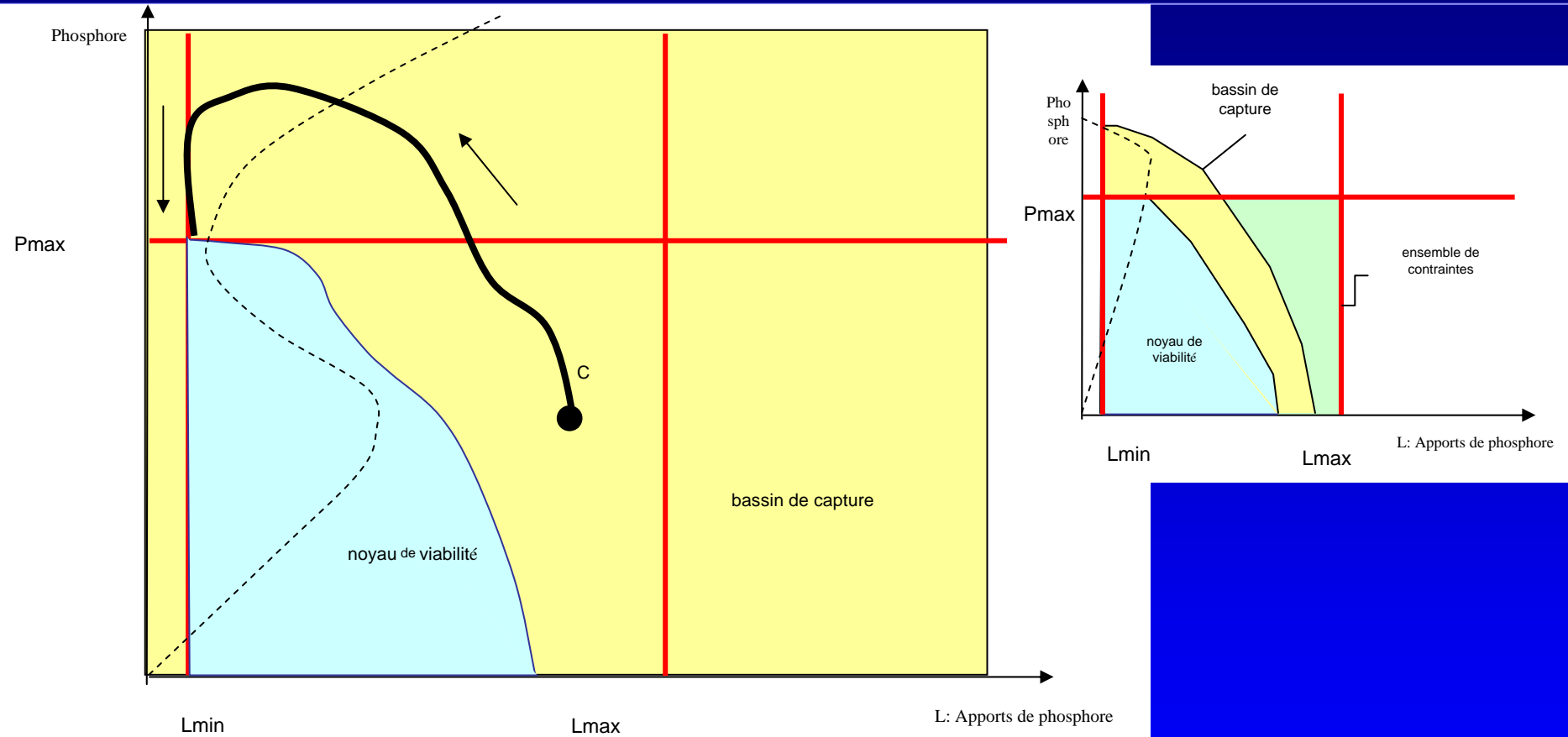
Noyau de viabilité du système exploitations riveraines du lac. Pour les états situés dans le noyau, il existe toujours une suite de contrôles qui permet au lac de rester dans le noyau. Pour les points du complémentaire (en vert), toutes les trajectoires possibles sortent de l'espace des contraintes en un temps fini. En pointillé, la ligne des équilibres du système.

Evolution temporelle



- A gauche : à partir d'un point situé dans le noyau
- A droite : à partir d'un point situé hors du noyau

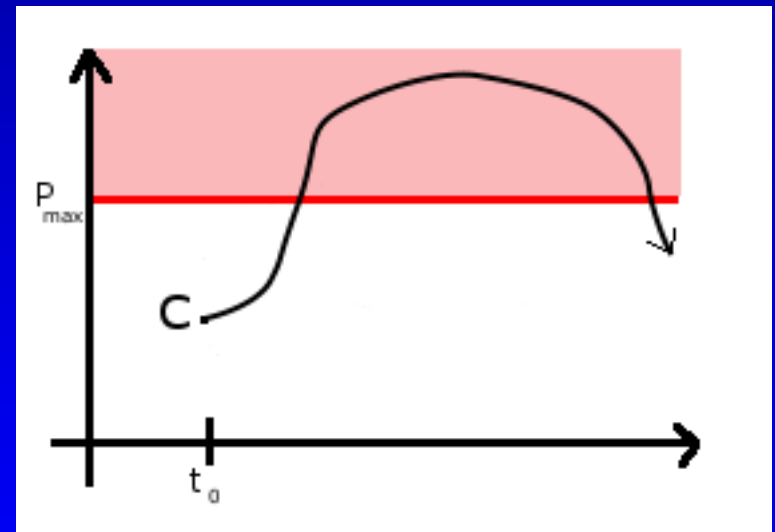
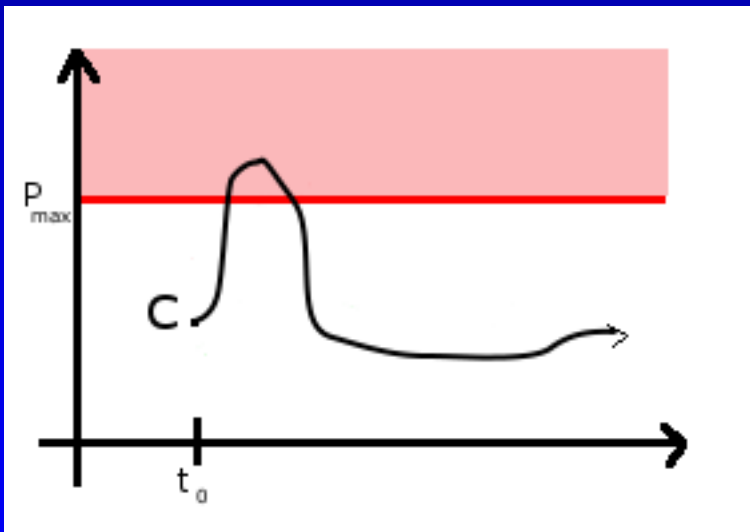
Bassin de capture



Bassin de capture du noyau de viabilité du système du lac. En temps fini (mais non borné), Il est toujours possible de ramener le lac dans un état oligotrophe et de l'y maintenir.

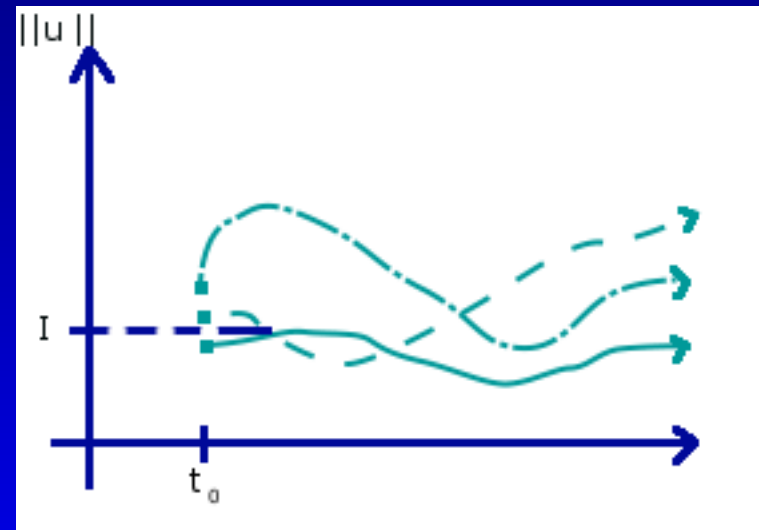
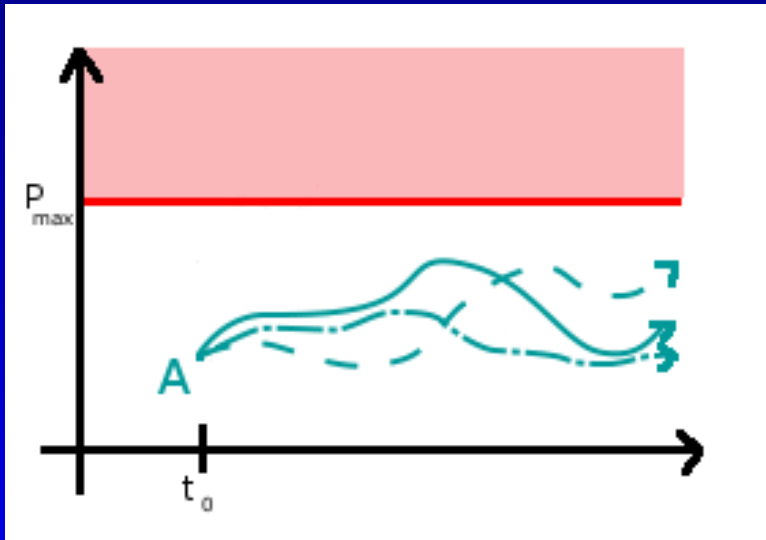
Evolution temporelle

- A partir d'un point situé hors du noyau de viabilité pais dans le bassin de capture
- A gauche : atteinte rapide du noyau de viabilité
- A droite : temps d'atteinte beaucoup plus long



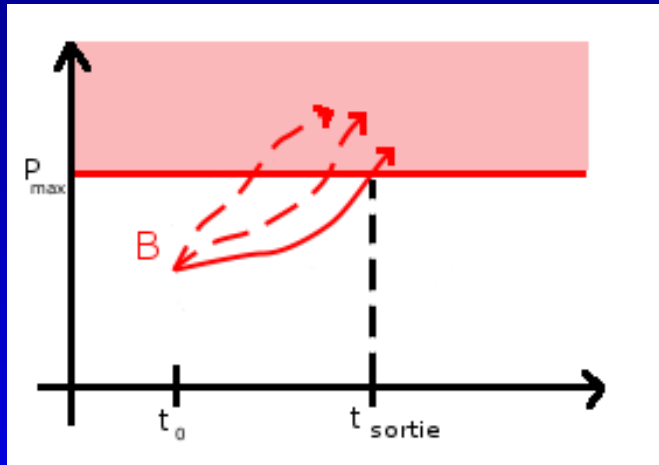
- D'où la nécessité d'indicateurs plus fins à l'intérieur du noyau comme du bassin de capture

Exemple d'indicateur dans le noyau : inertie

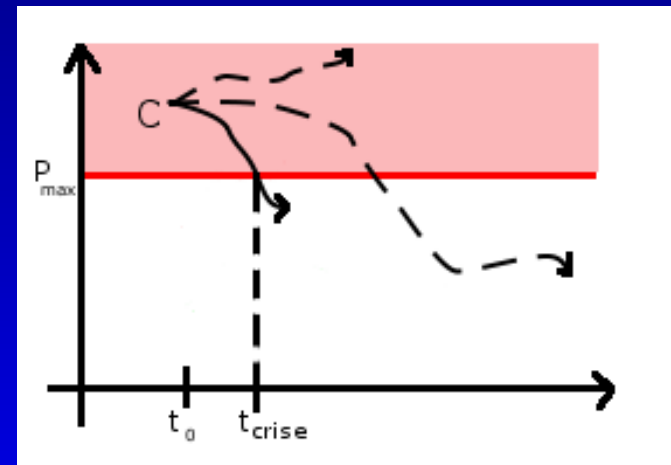


Trois évolutions viables issues d'un point viable A (à gauche) et leur fonction de contrôle associée (à droite). L'inertie, I , est le plus petit des maximums des valeurs de la fonction de contrôle au cours du temps.

Deux indicateurs hors du noyau



Temps de sortie (dans l'ensemble des contraintes)

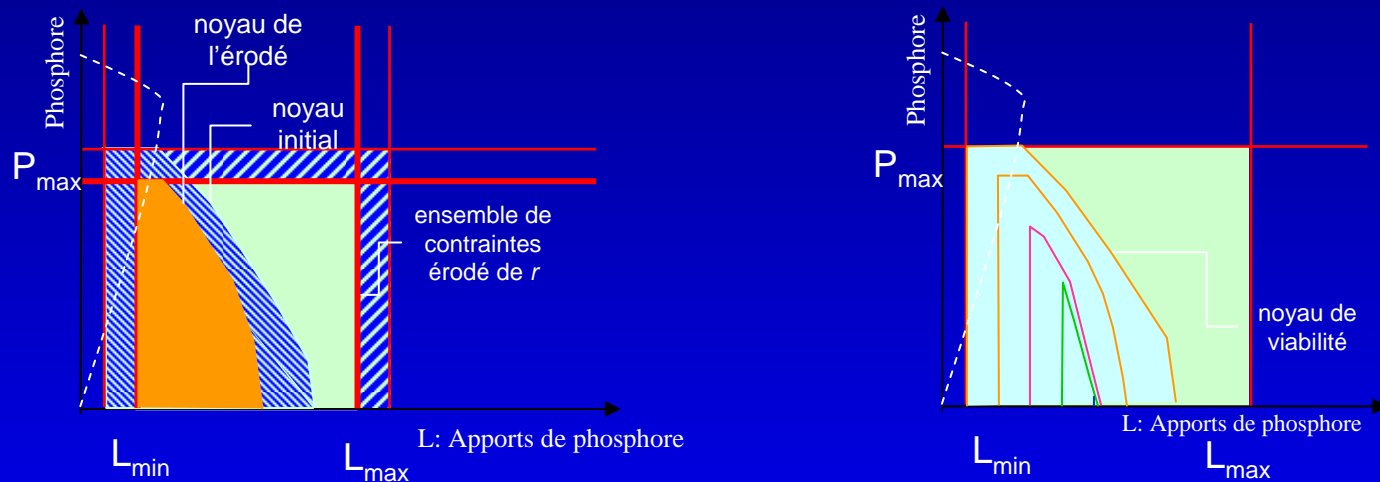


Temps de crise (hors de l'ensemble des contraintes)

Des incertitudes et des perturbations

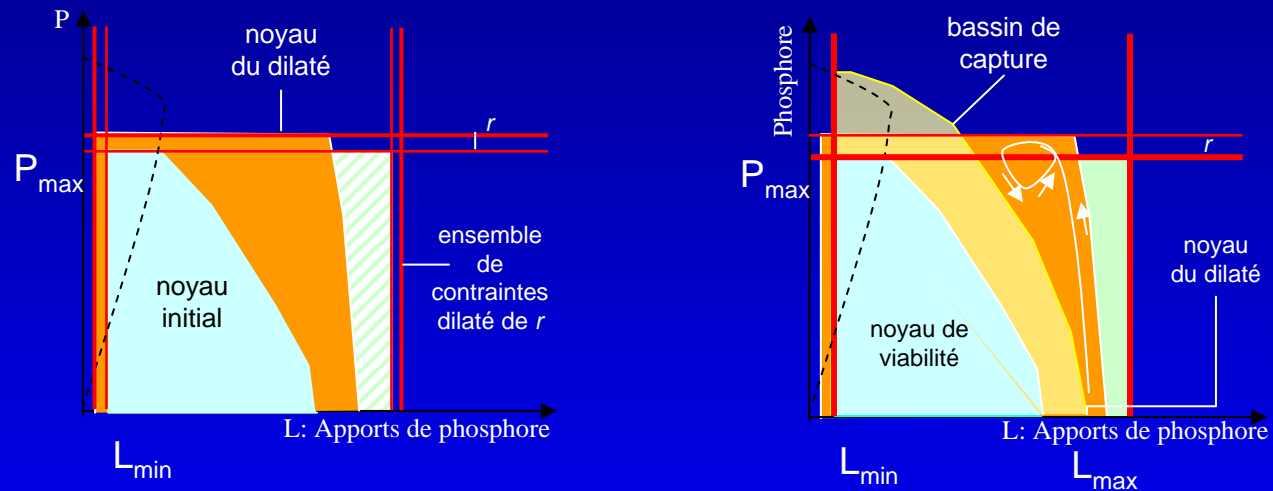
- Incertitudes sur l'ensemble des contraintes
- Incertitudes sur les variables et les contrôles
- Perturbations exogènes provoquant un changement brusque de l'état du système

Durcir les contraintes : fonction de sécurité



A droite : diminution du noyau de viabilité associé à un ensemble de contraintes érodé de r (distance L : les seuils des contraintes ont été déplacés vers l'intérieur d'une distance r). A gauche : courbes de niveaux de la fonction de sécurité à l'intérieur du noyau de viabilité.

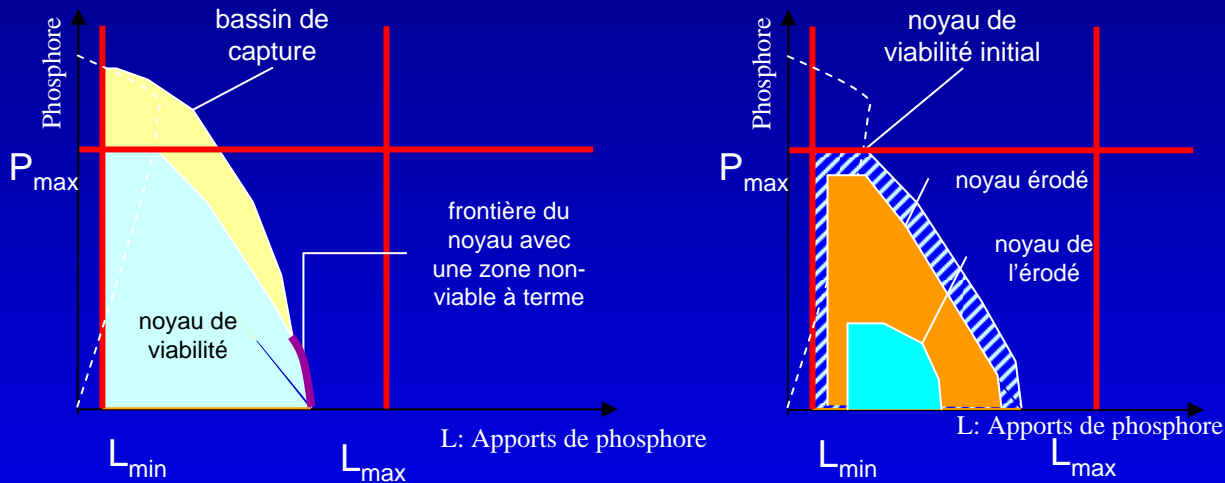
Relaxer les contraintes : fonction de restauration



A gauche: augmentation du noyau de viabilité associé à un ensemble de contraintes dilaté de r (distance L : les seuils des contraintes ont été déplacés vers l'extérieur d'une distance r). A droite : exemple de trajectoire dans le noyau dilaté qui sort inéluctablement par moment de l'ensemble de contrainte initial.

=> Fonction de restauration

S'assurer contre des incertitudes sur la position ou le contrôle



Il est possible de quitter le noyau de viabilité sans avoir jamais la possibilité d'y revenir: danger absolu.

Le noyau de viabilité du noyau érodé délimite la zone de l'espace où le système reste toujours à une distance r de la frontière du noyau de viabilité initial.

Envisager des perturbations conduisant à un changement brusque de l'état du système

- Indicateur de résilience : combine les perturbations envisagées et le temps de crise (ou une autre fonction de coût). Il associe, à chaque état du système, l'inverse du coût de retour dans le noyau de viabilité, dans la pire des situations obtenues, suite à l'occurrence d'une des perturbations envisagées.
- Résilience infinie \leftrightarrow un coût de retour nul quelle que soit la perturbation appartenant à l'ensemble des perturbations envisagées ; quelle que soit cette perturbation, l'état du système reste dans le noyau de viabilité.
- Résilience finie \leftrightarrow il existe une perturbation qui fait quitter le noyau de viabilité, mais l'état reste néanmoins toujours dans le bassin de capture
- Résilience nulle \leftrightarrow il existe une perturbation qui fait quitter le bassin de capture et le noyau de viabilité ne peut plus être atteint.

Conclusion

- Les indicateurs présentés sont des indicateurs pertinents en fonction des différents types d'incertitudes et des perturbations envisagées :
 - incertitude sur l'espace des contraintes : fonction de sécurité
 - relaxation de l'espace des contraintes : fonction de restauration
 - incertitude sur l'état et le contrôle : fonction de robustesse
 - perturbation (changement de l'état) : fonction de résilience

Limites de la méthode

- Disposer d'un système d'équations pour décrire le fonctionnement du système contrôlé
- Algorithmes de calcul gourmands en temps de calcul et en espace mémoire, dimension des problèmes traités limitée à 5