



Théorie de la Viabilité et Gestion Durable

Sophie Martin

IRSTEA

« Elle & l'infini : Mathématiques, nom féminin ? »

13 février 2019

Pour mieux
affirmer
ses missions,
le Cemagref
devient Irstea



www.irstea.fr

Poser un problème de viabilité

Un exemple : les exploitations riveraines du lac

Enjeu : l'eutrophisation des lacs



L'eutrophisation des lacs est un processus d'accumulation de nutriments dans le lac. Le phosphore est principalement concerné (avec l'azote). Il provient des engrais agricoles et des eaux usées.

Lac oligotrophe :

- Eau claire et saine
- Biodiversité élevée



L'eutrophisation a des effets néfastes sur la qualité de l'eau :

- ▣ développement rapide d'algues non consommées : diminution de la lumière et de l'oxygène
- ▣ développement de bactéries qui consomment l'oxygène dissout, production de gaz délétères

⇒ Impact sur l'utilisation de la ressource, la biodiversité, le tourisme

⇒ Diminuer les effets de l'eutrophisation n'est pas toujours évident : même en supprimant les apports de phosphore, le lac peut rester eutrophe

Lac eutrophe :

- Eau turbide
- Eau putride et toxique (bloom bactérien)
- Diminution de l'oxygène dissout
- Perte de biodiversité (étouffement d'espèces, développement d'algues)

Les exploitations riveraines du lac

Problème posé : le maintien de l'activité agricole



Lac oligotrophe



Lac eutrophe



On désire conserver à la fois un lac en « bonne santé » et l'activité agricole dans le bassin versant

Les exploitants doivent pouvoir exercer leur activité

⇒ apport minimum de Phosphore dans le lac

La population préfère un lac oligotrophe (eau claire)

⇒ valeur limite de Phosphore admissible

Poser le problème de viabilité pour le lac et les exploitations riveraines

4

Décrire le système : quelles sont les variables d'état ?



Lac oligotrophe

La « bonne santé » du lac peut être mesurée par la concentration de phosphore (P) dissoute dans le lac

La présence d'une activité agricole peut être reliée aux apports de phosphore dans le lac (L)

P et L suffisent à décrire le système « le lac et ses exploitations riveraines »

=> Ce sont les **variables d'état** du système

Lac eutrophe



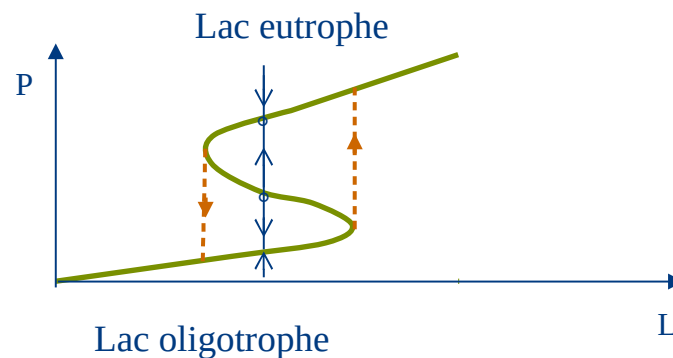
Poser le problème de viabilité pour le lac et les exploitations riveraines

Décrire les dynamiques du système : comment évoluent les variables ?



Lac oligotrophe

le lac suit une dynamique « connue »



Lac eutrophe



$$\frac{dP}{dt}(t) = - \underset{\text{perte}}{b.P(t)} + \underset{\text{apports extérieurs}}{L(t)} + r \frac{P^q(t)}{m^q + P^q(t)}$$

recyclage depuis les alluvions

Poser le problème de viabilité pour le lac et les exploitations riveraines 6

Décrire les contraintes : quels sont les états souhaitables du système ?



Lac oligotrophe

Lac eutrophe



- La concentration en Phosphore (P) doit rester sous un seuil pour prévenir l'eutrophisation

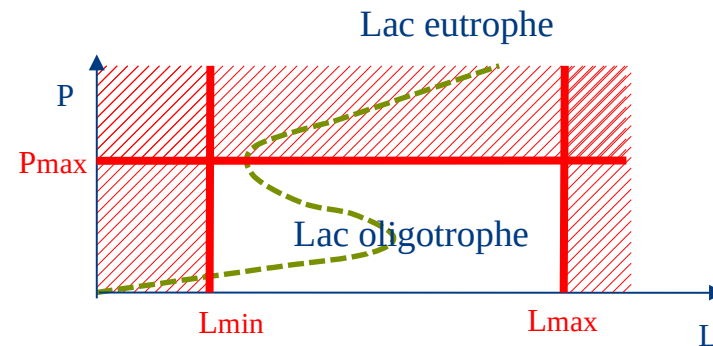
$$P(t) \leq P_{\max}$$

- Les apports en Phosphore (L) doivent être autorisés au-dessus d'un seuil pour permettre aux exploitations d'exercer leur activité

$$L(t) \geq L_{\min}$$

- Les apports en Phosphore (L) doivent être maintenus en-dessous d'un seuil pour éviter une pollution excessive de l'environnement

$$L(t) \leq L_{\max}$$



Poser le problème de viabilité pour le lac et les exploitations riveraines ⁷

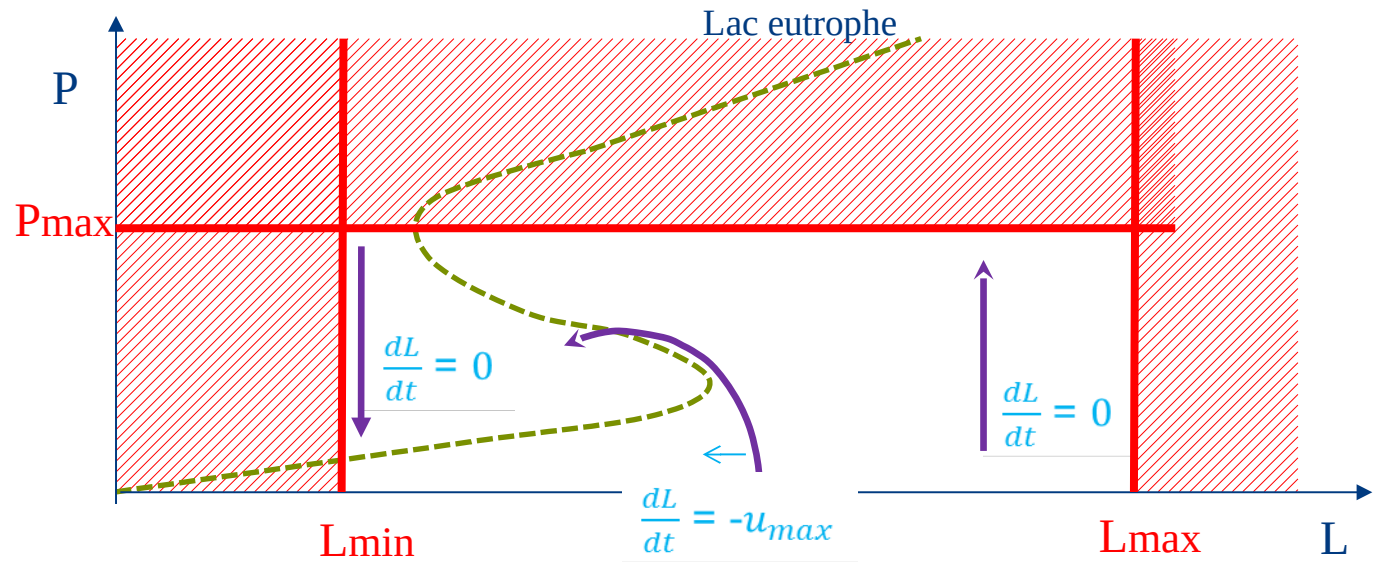
Décrire les contrôles: quelles sont les actions possibles ?



- Limiter les variations des apports en phosphore par la réglementation

$$-u_{max} \leq \frac{dL}{dt} \leq u_{max}$$

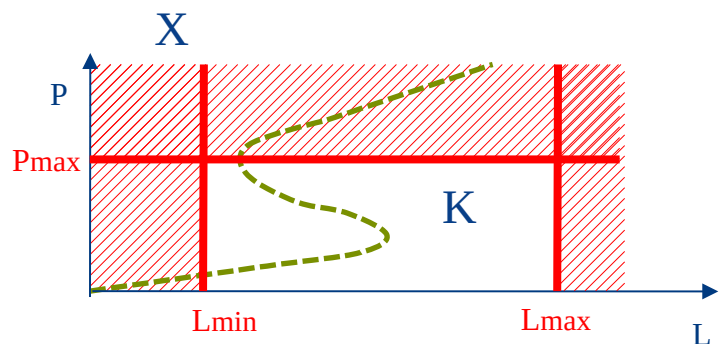
Lac oligotrophe



Lac oligotrophe

Poser le problème de viabilité pour le lac et les exploitations riveraines

Poser le problème de viabilité

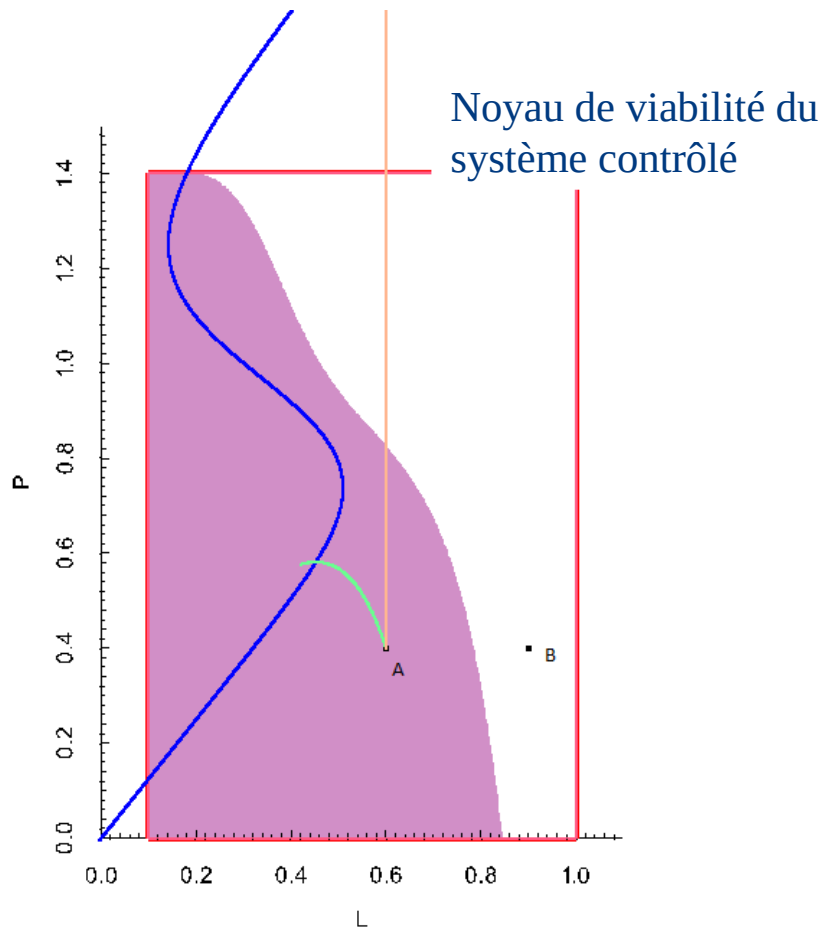


- Maintenir le système décrit par $(L(t), P(t))$ dans l'ensemble de contrainte K avec les contrôles admissibles
- C'est chercher les états du système pour lesquels il existe une fonction de contrôle $u(t)$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} (L(t), P(t)) \in X \\ \frac{dL}{dt}(t) = u(t) \\ \frac{dP}{dt}(t) = -b.P(t) + L(t) + r \frac{P^q(t)}{m^q + P^q(t)} \\ u \in U = [-u_{\max}; u_{\max}] \\ (L(t), P(t)) \in K = [L_{\min}; L_{\max}] \times [0; P_{\max}] \end{array} \right.$$

Concepts de la théorie de la viabilité

L'ensemble des états à partir desquels il est possible de contrôler le système pour rester dans l'ensemble des contraintes est le noyau de viabilité.



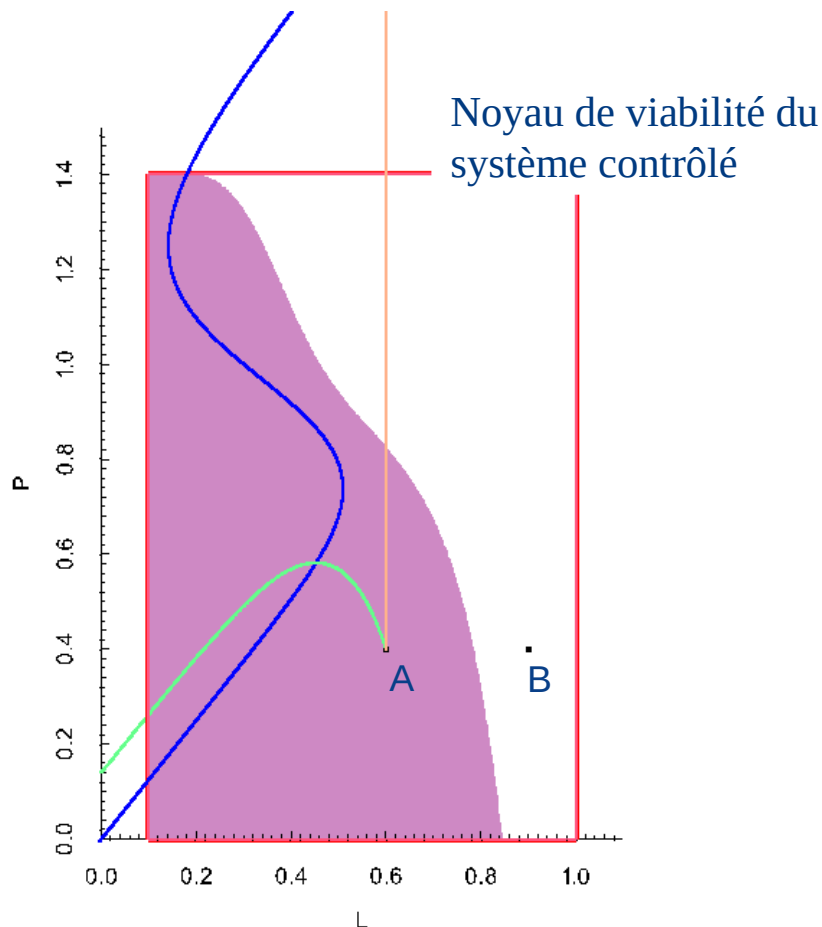
A partir du point A, si les apports restent constants, le lac finit par devenir eutrophe

A fait partie du noyau de viabilité, on peut trouver une suite de contrôles qui permet de rester dans le noyau

- Avec $u = -0.09$

Concepts de la théorie de la viabilité

L'ensemble des états à partir desquels il est possible de contrôler le système pour rester dans l'ensemble des contraintes est le noyau de viabilité.



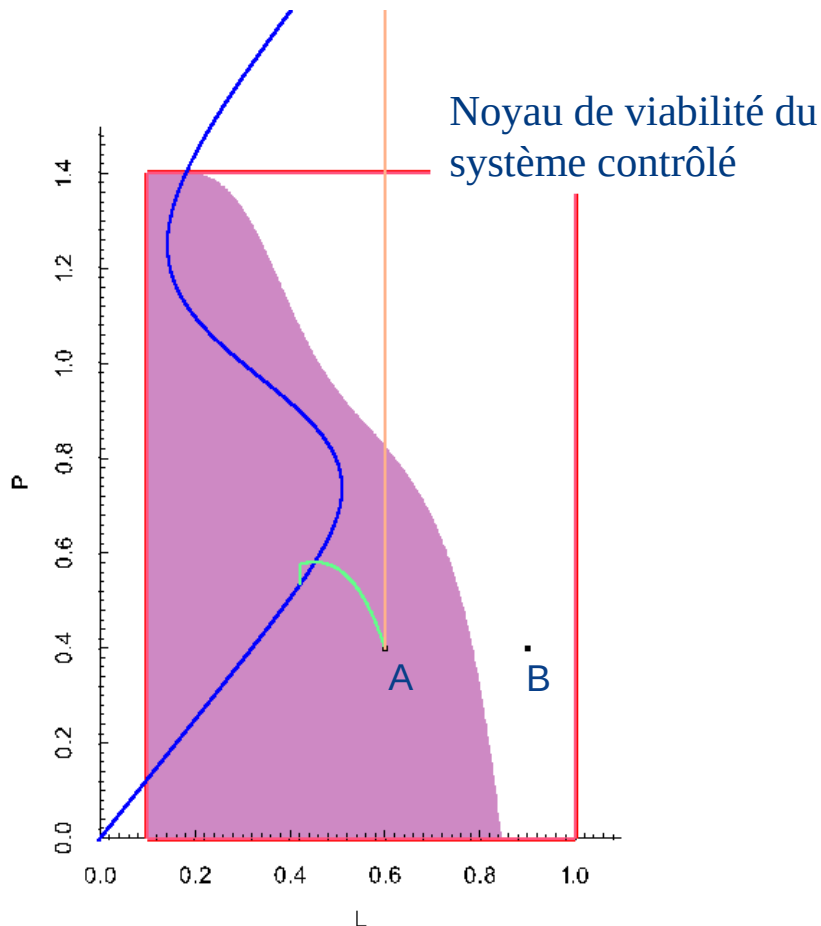
A partir du point A, si les apports restent constants, le lac finit par devenir eutrophe

A fait partie du noyau de viabilité, on peut trouver une suite de contrôles qui permet de rester dans le noyau

- Avec $u = -0.09$
- Mais au bout d'un moment les exploitations agricoles ne peuvent plus vivre

Concepts de la théorie de la viabilité

L'ensemble des états à partir desquels il est possible de contrôler le système pour rester dans l'ensemble des contraintes est le noyau de viabilité.



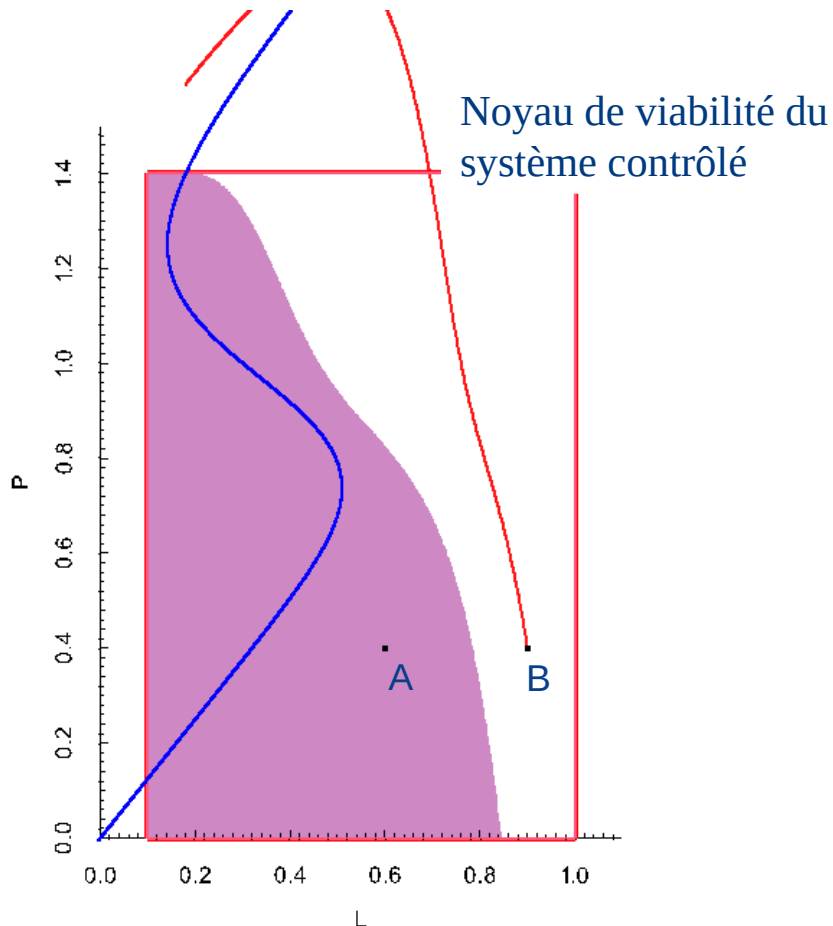
A partir du point A , si les apports restent constants, le lac finit par devenir eutrophe

A fait partie du noyau de viabilité, on peut trouver une suite de contrôles qui permet de rester dans le noyau

- Avec $u = -0.09$
- Puis $u = 0$

Concepts de la théorie de la viabilité

L'ensemble des états à partir desquels il est possible de contrôler le système pour rester dans l'ensemble des contraintes est le noyau de viabilité.



A partir du point B , aucune suite de contrôles ne permet de rester dans l'ensemble des contraintes

- Avec $u=-0.09$, ce qui représente la diminution maximale possible, le lac finit par devenir eutrophe

Formalisation du développement durable

Les enjeux du développement durable

Deux défis majeurs du développement durable :

- prendre en compte des enjeux concurrents comme les préoccupations environnementales et le développement économique
- assurer l'équité intergénérationnelle

Atout du formalisme de la théorie de la viabilité :

- une formulation de problème centrée sur les contraintes
- Contraintes vérifiées au cours du temps

Limites ou opportunités

- Disposer d'un système d'équations pour décrire le fonctionnement du système contrôlé
- Algorithmes gourmands en mémoire et temps de calcul (approximation sur une grille)
 - => calcul distribué
- Approximation du noyau par l'extérieur
- Effort de recherche sur les algorithmes
- Effort de recherche sur les systèmes à plusieurs niveaux (viabilité individuelle et collective) construire des règles de fonctionnement telles que les préoccupations de viabilité individuelle concourent à la viabilité globale